Abiturtraining Ü3

$\boxed{A3}$ I 1

**Differenzialgleichung:**
Die Köpertemperatur des Menschen sei $T_0$.
Nach Aufgabenstellung ist die Änderungsrate $T'(t)$ proportional zur Temperaturdifferenz $T_0 - T(t)$, d. h. es gilt für T die Differenzialgleichung:

$$T'(t) = k\ (T_0 - T(t)),\quad k = \text{konst.}$$

**Funktionsterm von T:**
Die Körpertemperatur des gesunden Menschen ist $T_0 = 37$ (Grad). Somit gilt für die Differenzialgleichung

$$T'(t) = k \cdot (37 - T(t)).$$

Ihre Lösung hat die Form:

$$T(t) = 37 - a\ e^{kt}.$$

Die Temperatur (in Grad) zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $T(0) = 17$
Nach einer halben Minute gilt: $T(0{,}5) = 34{,}3$. Dies führt auf die Gleichungen:

$$37 - a\ e^0 = 17 \qquad (1)$$
$$37 - a\ e^{0,5\ k} = 34{,}3 \qquad (2)$$

Aus Gleichung (1) folgt $a = 37 - 17 = 20$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt dies:

$$37 - 20\ e^{0,5\ k} = 34{,}3;\ e^{0,5k} = \frac{34{,}3 - 37}{-20} = 0{,}135;\ k = \frac{\ln(0{,}135)}{0{,}5} \approx -4{,}005.$$

Die Temperatur wird demnach beschrieben durch die Gleichung:

$$\mathbf{T(t) = 37 - 20\ e^{-4,005\ t}}$$

Für die Änderungsrate gilt:

$$T'(t) = -20\ (-4{,}005)e^{-4,005\ t} = 80{,}1e^{-4,005\ t}$$

Das Ende der Messung ist erreicht, wenn gilt:

$$T'(t) = 0{,}1;\ 80{,}1e^{-4,005t} = 0{,}1;\ e^{-4,005\ t} = \frac{0{,}1}{80{,}1};\ t = \frac{\ln\frac{0{,}1}{80{,}1}}{-4{,}005} \approx 1{,}67$$

**Also wird die Messung nach ungefähr 1,7 Minuten beendet.**
Die Temperatur (in Grad) nach dieser Zeit ist

$$T(1{,}67) = 37 - 20\ e^{-4,005\ 1,67} \approx 37 - 0{,}02 = 36{,}98 \approx 37{,}0.$$

**Am Ende der Messung zeigt das Thermometer recht genau die Körpertemperatur von 37,0 Grad an.**

A3
I. 2

$N(t) = 200\,000 - 160000\ e^{-kt}$

i) $N(0) = 200\,000 - 160\,000 = 40\,000$

Der Verlag startet mit 40000 Abonnenten

ii) Der Verlag erwartet langfristig eine Abonnentenzahl von 200 000

iii) $N(6) = 140\,000$

$200\,000 - 160\,000 \cdot e^{-6k} = 140\,000$

$e^{-6k} = \frac{-60\,000}{-160\,000} = \frac{3}{8}$

$k = \frac{\ln\frac{3}{8}}{-6} \approx 0{,}1635$

iv) $N(t) = 120\,000$

$200\,000 - 160\,000\ e^{-0,1635t} = 120\,000$

$-160\,000\ e^{-0,1635t} = -80\,000$

$e^{-0,1635t} = \frac{1}{2}$

$t = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}1635} \approx 4{,}24$

Nach ca 4,24 Monaten hat sich die Abonnentenzahl verdreifacht

v) $N'(t) = 100$

$0{,}1635 \cdot 160\,000 \cdot e^{-0,1635t} = 100$

$e^{-0,1635t} = \frac{100}{26160}$

$t = \frac{\ln\frac{10}{2616}}{-0{,}1635} \approx 34{,}04$

Im 34 Monat ändert sich die Abonnentenzahl um weniger als 100