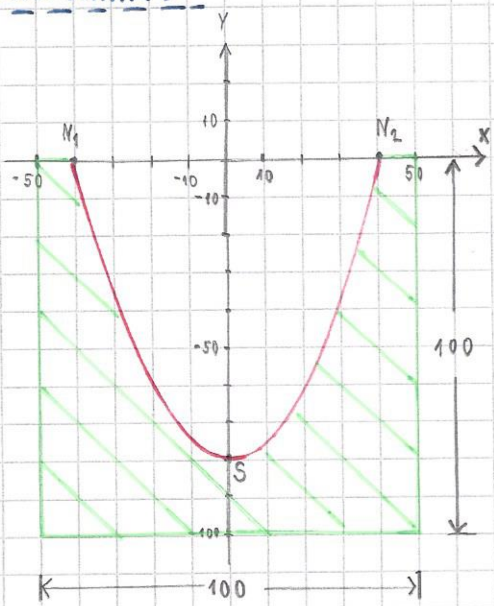
LS S. 121 / Aufgabe 7

geg: Querschnitt eines parabelförmigen Abwasser Kanalsegments; Maße in cm

ges: Volumen und Masse eines 1 m langen Abwasser Kanalsegments

· Querschnitt:



· Koordinaten der "Kritischen" Punkte:

$N_1(-40|0)$; $N_2(40|0)$; $S(0|-80)$

· Speziell quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2 + c$

Setze S ein: $f(x) = ax^2 - 80$

Punktprobe mit N_1: $0 = 1600a - 80$

$\Rightarrow a = \frac{1}{20}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{20}x^2 - 80$$

Anmerkung: Die Parabelgleichung verändert sich, wenn sie anders im Koordinatensystem gebettet wird.

· Flächeninhalt des Querschnitts:

$$A = 100^2 - \int_{-40}^{40} (0 - f(x))\,dx = 10.000 - \int_{-40}^{40} \left(-\frac{1}{20}x^2 + 80\right)dx$$

$$= 10.000 - \left[-\frac{1}{60}x^3 - 80x\right]_{-40}^{40} = 10.000 - \left(-\frac{6400}{6} + 3200 - \frac{6400}{6} + 3200\right)$$

$$= 10.000 - 6400 + \frac{6400}{3} = \frac{17200}{3}\ [cm^2] = \frac{43}{75}\ m^2$$

· Volumen des Abwasser Kanalsegments:

$$V = \frac{43}{75}\,m^2 \cdot 1\,m = \frac{43}{75}\,m^3 = 0{,}57\overline{3}\ m^3$$

· Masse des Abwasser Kanalsegments:

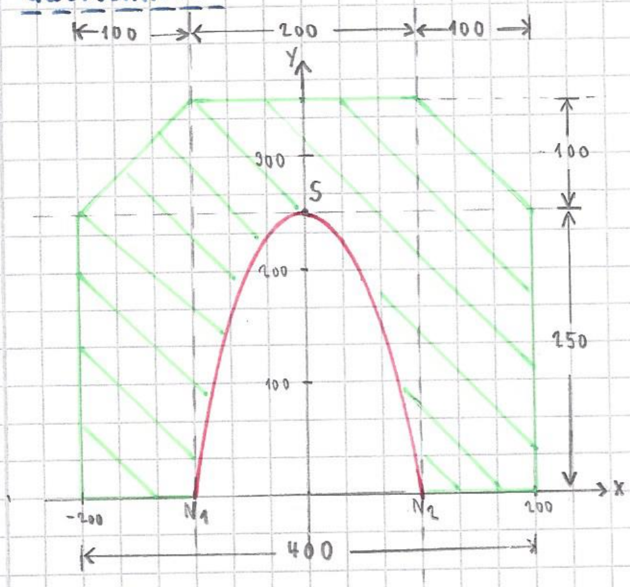
$$m = \frac{43}{75}\,m^3 \cdot 2{,}3\,\frac{t}{m^3} = 1{,}318\overline{6}\ t$$

LS S. 121 / Aufgabe 8

geg: Querschnitt eines parabelförmigen Fußgängertunnels ; Maße in cm

ges: Volumen und Masse eines 10m langen Fußgängertunnels

· Querschnitt:



· Koordinaten der „kritischen" Punkte:

$N_1(-100|0)$; $N_2(100|0)$; $S(0|250)$

· Speziell quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2 + c$

Setze S ein: $f(x) = ax^2 + 250$

Punktprobe mit N_1: $0 = 10.000a + 250$
$\Rightarrow a = -\frac{1}{40}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 250$

Anmerkung: Die Parabelgleichung verändert sich, wenn sie anders im Koordinatensystem eingebettet wird.

· Flächeninhalt des Querschnitts:

$$A = 400 \cdot 250 + \frac{400 + 200}{2} \cdot 100 - \int_{-100}^{100} f(x)\,dx$$

$$A = 130.000 - \int_{-100}^{100} \left(-\frac{1}{40}x^2 + 250\right) dx$$

$$= 130.000 - \left[-\frac{1}{120}x^3 + 250x\right]_{-100}^{100}$$

$$= 130.000 - \left(-\frac{25000}{3} + 25.000 - \frac{25000}{3} + 25.000\right)$$

$$= 130.000 + \frac{50.000}{3} - 50.000$$

$$= \frac{290.000}{3}\ [cm^2] = \frac{29}{3}\ m^2$$

· Volumen des Fußgängertunnels:

$$V = \frac{29}{3}\,m^2 \cdot 10\,m = \frac{290}{3}\,m^3 = 96\tfrac{2}{3}\,m^3$$

· Masse des Fußgängertunnels:

$$m = \frac{290}{3}\,m^3 \cdot 2{,}3\,\frac{t}{m^3} = \frac{667}{3}\,t = 222\tfrac{1}{3}\,t$$

LS S. 121 / Aufgabe 11

geg: $f(x) = -x^3 + x$

ges: Die vom Graphen von f und der Wendenormalen von f begrenzte Fläche A

- Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 1 \qquad f''(x) = -6x \qquad f'''(x) = -6$
- Wendepunkt:

a) notwendige Bdg $f''(x) = 0$:

$-6x = 0 \Rightarrow x = 0$

b) hinreichende Bdg $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$:

$f'''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Links-Rechts-Krümmung

c) Funktionswert: $f(0) = 0$; d.h. Links-Rechts-WP $(0|0)$

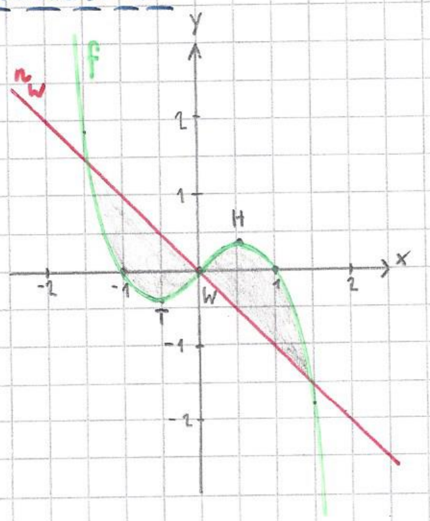
- Tangentensteigung m_t im WP: $m_t = f'(0) = 1$
- Normalensteigung m_n im WP: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -1$
- Gleichung der Wendenormalen: $m_n = -1$; $c = 0$ (da WP $\hat{=}$ 0)

$\Rightarrow n_w: \; y = -x$ (2. Winkelhalbierende)

- Schnittstellen von f und n_w: $-x^3 + x = -x \Rightarrow -x^3 + 2x = 0 \Rightarrow -x \cdot (x^2 - 2) = 0$

$\hat{=}$ Integralgrenzen: $\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{2}$

- Schaubild:



- Fläche A:

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (n_w(x) - f(x))\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (f(x) - n_w(x))\,dx$$

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (-x - (-x^3 + x))\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (-x^3 + x - (-x))\,dx$$

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (x^3 - 2x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x)\,dx$$

$$A = \left[\frac{1}{4}x^3 - x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$A = -(1 - 2) + (-1 + 2)$$

$$A = 2\ [FE]$$

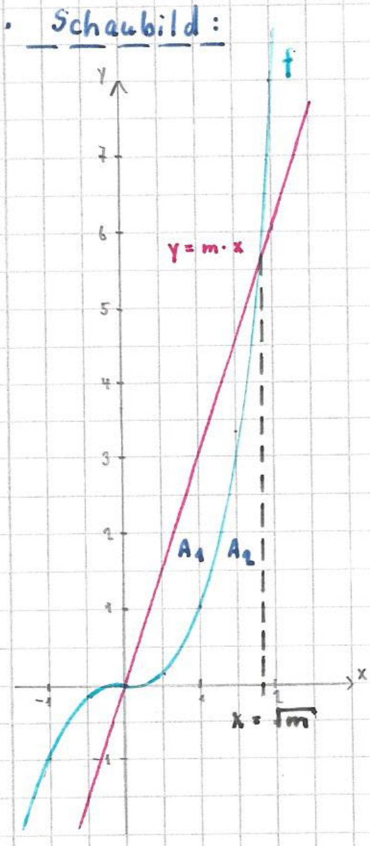
Anmerkung: Aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen von f zum Ursprung hätte es genügt, eine der eingeschlossenen Flächen zu betrachten und deren Inhalt zu verdoppeln.

LS S. 121 / Aufgabe 12

geg: $f(x) = x^3$; $y = m \cdot x$ mit $m \geq 0$

ges: Wert für m, sodass f und y im I. Quadranten eine Fläche $A = 2,25$ [FE] einschliessen.

· Schaubild:



· Schnittstellen von f und y: $f = y$

$x^3 = m \cdot x \Rightarrow x^3 - m \cdot x = 0 \rightarrow x \cdot (x^2 - m) = 0$

d.h. $x_1 = 0$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{m}$; $x > 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{m}$

· $A_1 = \int_0^{\sqrt{m}} (y(x) - f(x))\,dx = \int_0^{\sqrt{m}} (mx - x^3)\,dx$

$A_1 = \left[\frac{1}{2} m x^2 - \frac{1}{4} x^4\right]_0^{\sqrt{m}}$

$A_1 = \frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{4} m^2 = \frac{1}{4} m^2$

· $A_1 = \frac{9}{4}$ [FE]: $\frac{1}{4} m^2 = \frac{9}{4}$

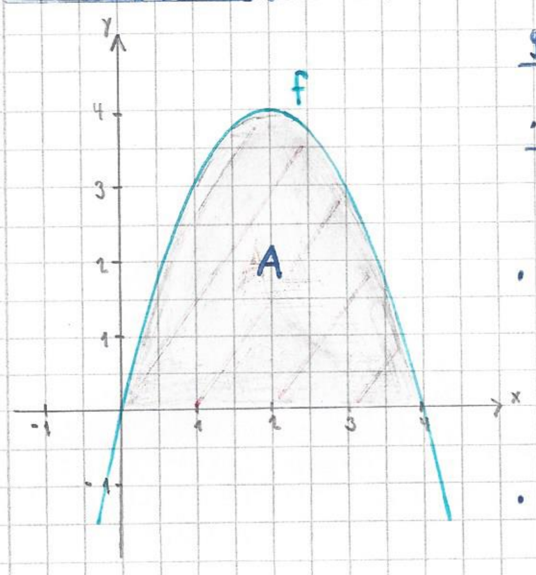
$m_{1/2} = \pm 3$; $m \geq 0$

$\Rightarrow m = 3$

· $A_2 = \int_0^{\sqrt{m}} f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{m}} x^3\,dx = \left[\frac{1}{4} x^4\right]_0^{\sqrt{m}} = \frac{1}{4} m^2 \triangleq A_1$

$\Rightarrow$ Da A_1 und A_2 gleich groß sind, halbiert die Parabel f die Fläche des Dreiecks für jedes m mit $m \geq 0$.

LS S. 121 / Aufgabe 14



geg: $f(x) = -x^2 + tx$; $t > 0$

ges: Wert für t, wenn $A = 288$ [FE]

· Nullstellen von f: $-x \cdot (x - t) = 0$

d.h. $x_1 = 0$; $x_2 = t$

· $A = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t (-x^2 + tx)\,dx$

$A = \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} t x^2\right]_0^t = -\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^3$

$A = \frac{1}{6} t^3$

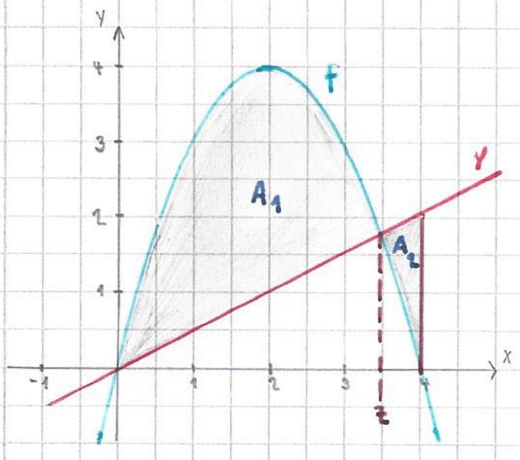
· $A = 288$: $\frac{1}{6} t^3 = 288 \Rightarrow t = 12$

LS S.121 / Aufgabe 13

a) **geg:** $f(x) = -(x-2)^2 - 4 = -x^2 + 4x \quad ; \quad y(x) = \frac{1}{2}x$

ges: die in der Abbildung markierten Flächen A_1 und A_2

· **Abbildung:**



· **Schnittstellen von f und y:**

f = y: $\quad -x^2 + 4x = \frac{1}{2}x$

$x^2 - \frac{7}{2}x = 0$

$x \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = \frac{7}{2}}$

· **Bestimmung der markierten Flächen:**

$$A_1 = \int_0^{\frac{7}{2}} (f(x) - y(x))\,dx = \int_0^{\frac{7}{2}} \left(-x^2 + 4x - \frac{1}{2}x\right) dx = \int_0^{\frac{7}{2}} \left(-x^2 + \frac{7}{2}x\right) dx$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^2\right]_0^{\frac{7}{2}} = -\frac{343}{24} + \frac{343}{16} = \frac{343}{48} = \underline{\underline{7\frac{7}{48}\,[FE]}}$$

$$A_2 = \int_{\frac{7}{2}}^{4} (y(x) - f(x))\,dx = \int_{\frac{7}{2}}^{4} \left(\frac{1}{2}x + x^2 - 4x\right) dx = \int_{\frac{7}{2}}^{4} \left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^2\right]_{\frac{7}{2}}^{4} = \frac{64}{3} - 28 - \frac{343}{24} + \frac{343}{16} = \underline{\underline{\frac{23}{48}\,[FE]}}$$

b) **geg:** $f(x) = -x^2 + 4x \quad ; \quad y(x) = m \cdot x$

ges: Wert für m, sodass A_1 und A_2 gleich groß sind

$$A_1 = \int_0^{z} (f(x) - y(x))\,dx = \int_0^{z} (-x^2 + 4x - mx)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}mx^2\right]_0^{z}$$

$$A_1 = -\frac{1}{3}z^3 + 2z^2 - \frac{1}{2}mz^2 = -\frac{1}{6}z^2 \cdot (2z - 12 + 3m)$$

$$A_2 = \int_z^4 (y(x) - f(x))\,dx = \int_z^4 (mx + x^2 - 4x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}mx^2\right]_z^4$$

$$A_2 = \frac{64}{3} - 32 + 8m - \frac{1}{3}z^3 + 2z^2 - \frac{1}{2}mz^2 = -\frac{32}{3} + 8m - \frac{1}{6}z^2 \cdot (2z - 12 + 3m)$$

Bedingung: $A_1 = A_2$ $\quad -\frac{1}{6}z^2 \cdot (2z - 12 + 3m) = -\frac{32}{3} + 8m - \frac{1}{6}z^2 \cdot (2z - 12 + 3m)$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{32}{3} + 8m$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{m = \frac{4}{3}}}$$