S 187 Nr. 1a

Gegeben ist das Wachstum rekursiv

durch $B(n) = B(n-1) + p(S - B(n-1))$

und $B(0) = 5000$; $S = 10000$; $p = 0{,}1$

Gesucht ist eine explizite Darstellung.

Mit $B(n) = S - c \cdot a^n$

Berechnung von c $\Rightarrow$ $B(0) = S - c \cdot \underbrace{a^0}_{=1} \Rightarrow \underline{\underline{c = S - B(0)}}$

$\underline{\underline{c}} = 10000 - 5000 = \underline{\underline{5000}}$

Der Quotient aus dem Nachfolger und dem Vorgänger des Sättigungsmankos ist bei beschränktem Wachstum das a aus der expliziten Gleichung.

$M(n) = S - B(n)$; $M(n-1) = S - B(n-1)$ Sättigungsmanko

$$\Rightarrow a = \frac{M(n)}{M(n-1)} = \frac{S - B(n)}{S - B(n-1)} = \frac{S - [B(n-1) + p \cdot (S - B(n-1))]}{S - B(n-1)}$$

$$a = \frac{S - B(n-1) - p(S - B(n-1))}{S - B(n-1)} = \frac{\cancel{S - B(n-1)} \cdot (1-p)}{\cancel{S - B(n-1)}}$$

$\underline{\underline{a = (1-p)}}$ $\Rightarrow$ Beispiel: $\underline{\underline{a}} = 1 - 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}9}}$

Explizite Darstellung: $B(n) = 10000 - 5000 \cdot 0{,}9^n$

oder: $B(n) = 10000 - 5000 \cdot e^{n \cdot \ln(0{,}9)}$

$B(n) = 10000 - 5000 \cdot e^{-0{,}1053605 \cdot n}$

---

b) $S = 20.000$; $p = 0{,}1$; $B(0) = 50000$ $\Rightarrow$ $C = 20.000 - 5000$

$\underline{\underline{c = 15000}}$

$\underline{\underline{a}} = 1 - p = 1 - 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}9}}$

$B(n) = 20000 - 15000 \cdot 0{,}9^n$ oder $B(n) = 20000 - 15000 \cdot e^{n \cdot \ln(0{,}9)}$

---

c) $S = 1000$; $p = 0{,}1$; $B(0) = 5000$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{c}} = 1000 - 5000 = \underline{\underline{-4000}}$

$\underline{\underline{a}} = 1 - p = 1 - 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}9}}$

$B(n) = 1000 + 4000 \cdot 0{,}9^n = 1000 + 4000 \cdot e^{n \cdot \ln(0{,}9)}$

$B(n) = 1000 + 4000 \cdot e^{-0{,}1053605 \cdot n}$