S 188 Nr 10

Beschränktes Wachstum liegt vor wenn folgenden Gleichung erfüllt ist

$$B(n) = B(n-1) + k\,(S - B(n-1)) = B(n-1) + k\cdot S - k\cdot B(n-1)$$

$$B(n) = B(n-1) - k\,B(n-1) + k\,S = \underline{\underline{(1-k)\cdot B(n-1) + k\cdot S}}$$

Der Text der Aufgabe führt zu folgendem Ansatz

$$B(n) = B(n-1) - 0{,}02\cdot B(n-1) + 0{,}1 = \underbrace{(1-0{,}02)}_{=1-k}\cdot B(n-1) + \underbrace{0{,}1}_{=k\cdot S}$$

Ein Vergleich der beiden grün unterstrichenen Terme lässt erkennen, dass beide die gleiche Struktur haben und also beschränktes Wachstum beschreiben.

Koeffizientenvergleich zeigt $1-k = 1-0{,}02 \Rightarrow \underline{k = 0{,}02}$

$k\cdot S = 0{,}1 \Rightarrow 0{,}02\cdot S = 0{,}1 \Rightarrow \underline{\underline{S}} = \frac{0{,}1}{0{,}02} = \underline{\underline{5}}$

$\Rightarrow$ Die explizite Gleichung für beschränktes Wachstum

$B(t) = S - c\cdot a^t$ mit $\underline{\underline{c}} = S - B(0) = 5 - 0 = \underline{\underline{5}}$

und $\underline{\underline{a}} = 1-k = 1-0{,}02 = \underline{\underline{0{,}98}}$

$$\underline{\underline{B(t)}} = \underline{\underline{5 - 5\cdot 0{,}98^t}} = \underline{\underline{5 - 5\cdot e^{t\cdot\ln(0{,}98)}}} \Rightarrow B(60) = 5 - 5\cdot e^{60\cdot\ln(0{,}98)}$$

$$\underline{\underline{B(60) \approx 3{,}5\,ml}}$$

Nach welcher Zeit werden 0,01 ml aufgenommen

$\Rightarrow$ gefragt ist nach der Änderungsrate oder Wachstumsgeschwindigkeit

$$B'(t) = -5\cdot e^{t\ln(0{,}98)}\cdot\ln(0{,}98) = -5\ln(0{,}98)\cdot e^{t\ln(0{,}98)}$$

$$B'(t) = 0{,}01 \Rightarrow -5\cdot\ln(0{,}98)\,e^{t\ln(0{,}98)} = 0{,}01$$

$$e^{t\ln(0{,}98)} = \frac{0{,}01}{-5\ln(0{,}98)}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{-5\ln(0{,}98)}\right)}{\ln(0{,}98)} \approx \underline{\underline{114{,}47\,s}}$$

Nach 114,5 Sekunden beträgt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit 0,01 ml pro Sekunde