S 188 Nr. 5

a) $B(n) = B(n-1) + p(S - B(n-1))$ beschränktes Wachstum liegt vor wenn Proportionalitätskonstante p bei **allen** Zahlenpaaren der Liste vorliegt.

Nachweis: $\dfrac{B(n) - B(n-1)}{S - B(n-1)} = p \approx \text{konstant}$

$$\frac{B(1) - B(0)}{S - B(0)} = \frac{397 - 320}{800 - 320} \approx 0{,}1604167 \approx 0{,}16 \approx p_1$$

$$\frac{B(2) - B(1)}{S - B(1)} = \frac{461 - 397}{800 - 397} = 0{,}158808 \approx 0{,}16 \approx p_2$$

$\vdots$

$$\frac{B(10) - B(9)}{S - B(9)} = \frac{716 - 700}{800 - 700} = 0{,}16 \approx p_{10}$$

Da alle p nahezu gleich sind $\Rightarrow$ beschränktes Wachstum

b) rekursive Darstellung: $B(n) = B(n-1) + 0{,}16 \cdot (800 - B(n-1))$ mit $B(0) = 320$

explizite Darstellung: $B(n) = S - c \cdot a^n$

$c = S - B(0) = 800 - 320 = 480$; $a = 1 - p = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$

Siehe Lösung S187 Nr. 1

$$B(n) = 800 - 480 \cdot 0{,}84^n = 800 - 480 \cdot e^{n \cdot \ln(0{,}84)}$$

c) $B(n) - B(n-1) = 2 \Rightarrow \cancel{B(n-1)} + p(S - B(n-1)) - \cancel{B(n-1)} = 2$

$0{,}16 \cdot (800 - B(n-1)) = 2 \Rightarrow 0{,}16 \cdot 800 - 0{,}16 \cdot B(n-1) = 2$

$\Rightarrow -0{,}16 \cdot B(n-1) = 2 - 0{,}16 \cdot 800 \Rightarrow B(n-1) = \dfrac{2 - 0{,}16 \cdot 800}{-0{,}16} = 787{,}5$

$800 - 480 \cdot e^{(n-1) \cdot \ln(0{,}84)} = 787{,}5 \Rightarrow -480 \cdot e^{(n-1) \cdot \ln(0{,}84)} = -12{,}5$

$\Rightarrow e^{(n-1) \cdot \ln(0{,}84)} = \dfrac{-12{,}5}{-480} \;\Big|\ln \Rightarrow (n-1) \cdot \ln(0{,}84) = \ln\left(\dfrac{12{,}5}{480}\right) \Rightarrow$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{12{,}5}{480}\right)}{\ln(0{,}84)} + 1 \approx 21{,}9 \text{ Tage}$$