S 191 Nr 5

Fassungsvermögen 100 l

enthält anfangs 20 L $\hat{=}$ f(0) $\Rightarrow f(0) = 20\,l$

a) $f'(x) = 5 - 0{,}1 \cdot f(x) = 0{,}1 \cdot (\frac{5}{0{,}1} - f(x)) = \underline{\underline{\underbrace{0{,}1}_{=k} (\underbrace{50}_{=S} - f(x))}}$

Die Differenzialgleichung beschreibt beschränktes Wachstum

$k = 0{,}1$; $S = 50$ und $f(0) = 20\,l$ sind bereits bekannt

b) $\Downarrow$ Die Lösung der Differenzialgleichung $f(x) = S - \underbrace{(S - f(0))}_{=C} \cdot e^{-k \cdot x}$

$\underline{\underline{f(x) = 50 - 30 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}}}$ $\Rightarrow f'(x) = -30 \cdot (-0{,}1) \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$

$f'(x) = 3 \cdot e^{-0{,}1\,x} > 0 \Rightarrow$ f(x) ist streng monoton steigend

f(x) steigt am Anfang schnell an und nähert sich dann langsam der Grenze $S = 50\,l$

c) Die momentane Zunahmerate bei einer gegebenen Flüssigkeitsmenge von 45l kann direkt mit der Differenzialgleichung berechnet werden.

$\underline{\underline{f'(x)}} = 0{,}1 \cdot (50 - 45) = 0{,}1 \cdot 5 = \underline{\underline{0{,}5 \frac{l}{s}}}$

Die Zunahmerate $\underline{\underline{0{,}5 \frac{l}{s}}}$ bei einer Füllmenge von $\underline{\underline{45\,l}}$

Die Dauer wird berechnet über die Ableitung f'(x)

$f'(x) = 3 \cdot e^{-0{,}1x} = 0{,}5$ siehe Aufgabenteil b)

$e^{-0{,}1x} = \frac{0{,}5}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \quad | \ln$

$-0{,}1x = \ln(\frac{1}{6}) = \ln(1) - \ln(6) = -\ln(6) \quad | : -0{,}1$

$\underline{\underline{x}} = \frac{-\ln(6)}{-0{,}1} \approx \underline{\underline{17{,}92\,s}}$

Noch ungefähr $\underline{\underline{\text{18 Sekunden}}}$ beträgt die momentane Zunahmerate $0{,}5 \frac{l}{s}$.