S. 251

1.) Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren muss 0 sein.

a) $\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = 10+2 \neq 0 \Rightarrow g \not\perp h$

b) $\begin{pmatrix}2\\-9\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix} = 10-18+8 = 0 \Rightarrow g \perp h$

2.) $\vec{a}\cdot\vec{b} \stackrel{!}{=} 0$

a) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\-4\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2b_1 - 12 = 0 \Rightarrow b_1 = 6$

b) $\begin{pmatrix}1\\a_2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2 - a_2 + 3 = 0 \Rightarrow a_2 = 5$

c) $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\b_3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3+0+2b_3 = 0 \quad |+3$

$2b_3 = 3 \quad |:2 \Rightarrow b_3 = 1{,}5$

S. 252

3.) Als Stützvektor von h dient der Stützvektor von g, denn das ist der Ortsvektor des gemeinsamen Punktes. Die Richtungsvektoren von g und h müssen orthogonal sein.

a) $\begin{pmatrix}7\\17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = 0$ (Man kann auch a_1 beliebig wählen und dann a_2 bestimmen.)

$7a_1 + 17a_2 = 0$

$7\cdot(-17) + 17\cdot 7 = 0 \Rightarrow h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-17\\7\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = 0$ (Es gibt unendlich viele Vektoren, die zu $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ orthogonal sind. Zwei Koord. wählt man und*

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$ $\quad 1+2-3 = 0$ ✓ $\Rightarrow h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\11\\-6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

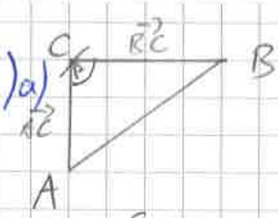
$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1$

* die Dritte wird berechnet

c) $\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = 0$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 = 0$

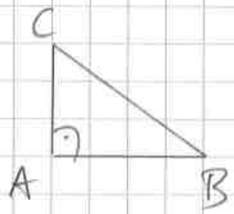
4.) a)



$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$$

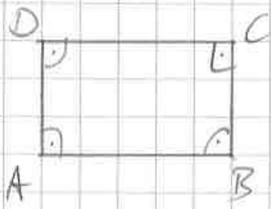
S.252

b)



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

c)



$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$$
$$\vec{BC} \cdot \vec{CD} = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

(~~Gegenüberliegende~~ Drei Ecken ~~orthogonal~~ haben 90°-Winkel, damit ~~sind~~ ist auch ~~die~~ der andere Winkel 90° groß)

d) siehe c) und zusätzlich: $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$ ~~und~~ = $|\vec{BC}| = |\vec{CD}|$

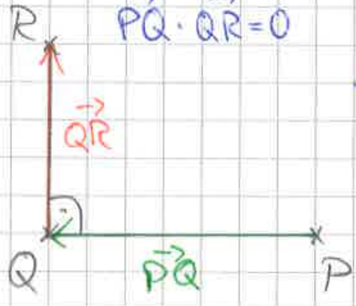
5.) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{BD} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

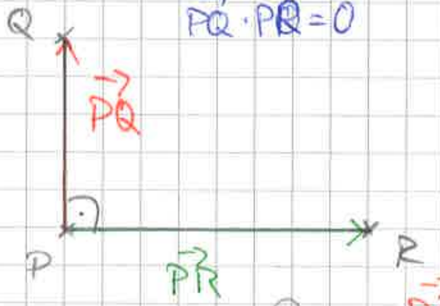
$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 15 - 15 = 0$

=> Die Diagonalen sind orthogonal.

6.) a) $\vec{PQ} \cdot \vec{QR} = 0$

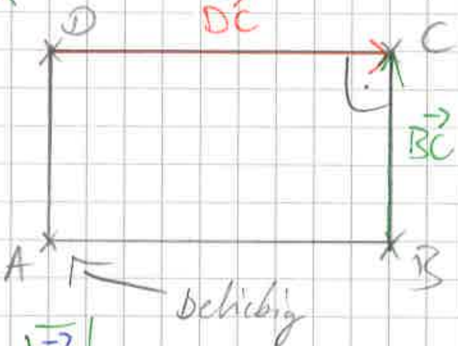


b) $\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 0$



c)

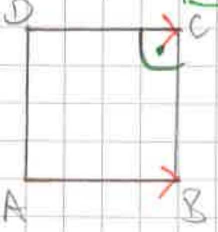
d)



$$\vec{AC} - \vec{AB} = (\vec{c} - \vec{a}) - (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} + \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = \boxed{\vec{BC}}$$

$$\vec{AC} - \vec{AB} = \boxed{\vec{BC}}$$
$$\vec{AC} - \vec{AD} = \boxed{\vec{DC}}$$

7.)



$\left| \vec{AB} \overset{!}{=} \vec{DC} \right|$ und $\left| \vec{CD} \cdot \vec{CB} = 0 \right|$

$$\begin{pmatrix} 2+2 \\ 10-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1-5 \\ c_2+2 \\ c_3-7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 4 = c_1 - 5 \Rightarrow c_1 = 9 \\ \Rightarrow 8 = c_2 + 2 \Rightarrow c_2 = 6 \\ \Rightarrow 1 = c_3 - 7 \Rightarrow c_3 = 8 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5-9 \\ -2-6 \\ 7-8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-9 \\ 10-6 \\ 4-8 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$28 - 32 + 4 = 0$ ✓

C(9|6|8)

8.) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{c}=0$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{c}=0$ S. 252

* unterbestimmtes LGS

* I $c_1+2c_2+3c_3=0$

II $2c_1 \quad +3c_3=0 \Rightarrow 2c_1=-3c_3 \Rightarrow c_1=-\frac{3}{2}c_3$ in I

$-\frac{3}{2}c_3+2c_2+3c_3=0 \quad | -1{,}5c_3$

$2c_2 = -1{,}5c_3 \quad | :2$

$c_2 = -\frac{3}{4}c_3$

$(\neq 0)$
c_3 beliebig wählbar, dann c_1 und c_2 berechnen. Um ganze Zahlen zu erhalten: z.B. $c_3=+4 \Rightarrow c_1=-6$ und $c_2=-3$

$\vec{c}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$ Alle Vektoren erhält man, indem man beliebige Vielfache von $\vec{c}$ bildet: $k\cdot\begin{pmatrix}-6\\3\\4\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$

b) $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{c}=0 \quad \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{c}=0$

I $2c_1+3c_2-c_3=0$

II $5c_1-c_2-2c_3=0 \quad |+c_2 \Rightarrow \quad c_2=5c_1-2c_3$ (*) in I

$2c_1+3\cdot(5c_1-2c_3)-c_3=0$

$2c_1+15c_1-6c_3-c_3=0$

$17c_1-7c_3=0 \Rightarrow 7c_3=17c_1 \,|:7 \quad c_3=\frac{17}{7}c_1$ in (*)

$c_2=5c_1-2\cdot\frac{17}{7}c_1$

$c_2=\cancel{34}\frac{35}{7}c_1-\frac{34}{7}c_1=\frac{1}{7}c_1$

$c_1=7 \Rightarrow c_2=1 \Rightarrow c_3=17 \quad \Rightarrow k\cdot\begin{pmatrix}7\\1\\17\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$

c) $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\cdot\vec{c}=0 \quad \begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}\cdot\vec{c}=0$

I $c_1+2c_2+5c_3=0$ $\qquad c_1=5 \Rightarrow c_3=-3 \quad c_2=5 \quad k\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\-3\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$

II $4c_1-c_2+5c_3=0$

I−II: $-3c_1+3c_2=0 \Rightarrow 3c_2=3c_1 \Rightarrow c_2=c_1$ in II

$4c_1-c_1+5c_3=0 \Rightarrow 3c_1+5c_3=0 \Rightarrow 5c_3=-3c_1 \Rightarrow c_3=-\frac{3}{5}c_1$

9.) a) $\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{!}{=} 0$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ $\qquad$ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

$3 + 2b_3 = 0$ $\qquad$ $c_1 + 8 = 0$ $\qquad$ $-24 + b_2 - 6 = 0 \quad | +30$

$\underline{b_3 = -\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $\underline{c_1 = -8}$ $\qquad$ $\underline{b_2 = 30}$

b) 3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\qquad$ 1. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ $\qquad$ 2. $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$

I $\quad b_1 + b_2 + 1 = 0$ $\qquad$ $c_1 + 2 - 5 = 0 \quad | +3$ $\qquad$ II $\quad 3b_1 + 2b_2 - 5 = 0$

Ia $\quad b_1 = -b_2 - 1 \quad \hat{=}$ II $\qquad$ $\underline{c_1 = 3}$ $\qquad$ $3 \cdot (-b_2 - 1) + 2b_2 - 5 = 0$

$b_1 = -(-8) - 1$ $\qquad$ $-3b_2 - 3 + 2b_2 - 5 = 0$

$\underline{b_1 = 7}$ $\qquad$ $-b_2 - 8 = 0 \quad | +b_2$

$\underline{-8 = b_2}$ $\quad \hat{=}$ Ia

10.) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \overset{!}{=} 0$

$\begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad$ kein Rechteck!

$9 - 6 \neq 0 \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} \neq 0 \Rightarrow \vec{AB} \not\perp \vec{BC}$

S.253

15.) a) Der RV muss orthogonal zu beiden Spannvektoren sein.

$$\vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \qquad \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

b)

$\mathrm{I}\quad 2v_1 - v_2 + 5v_3 = 0 \qquad \mathrm{II}\quad v_1 + v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_3$ in I

$$-2v_3 - v_2 + 5v_3 = 0$$

$$-v_2 + 3v_3 = 0 \quad | + v_2$$

$$3v_3 = v_2$$

$v_3 = 1 \Rightarrow v_2 = 3,\ v_1 = -1 \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt (dessen Ortsvektor) laut Aufgabe

16.) RV der Geraden muss orthogonal zu beiden Spannv. sein.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

$2 - 6 + 4 = 0\ \checkmark \qquad 4 - 6 + 2 = 0\ \checkmark \qquad \Rightarrow g \perp E$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

$-2 - 6 + 8 = 0\ \checkmark \qquad 4 - 6 + 6 \neq 0 \qquad \Rightarrow g \not\perp E$