LS S. 292 / Aufgabe 12:

a) Vektoren aufstellen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8-1 \\ -2+2 \\ 5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 17-1 \\ -2+2 \\ 5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 6+2 \\ -7+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung der Vektoren:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = -144 + 0 + 144 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ Die Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sind paarweise zueinander orthogonal.

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ liegen parallel zur $x_1 x_3$ - Ebene (da beide Vektoren $x_2 = 0$ besitzen!).

A liegt ebenfalls in dieser zur $x_1 x_3$ - Ebene parallelen Ebenen E^*:

$$E^*: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad E^*: \; x_2 = -2$$

Da $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$ (vgl. Teilaufgabe a)), gilt auch: $\overrightarrow{AD} \perp E^*$; d.h. $\overrightarrow{AD}$ ist ein senkrechtes Lot von D auf E^*.

$$\Rightarrow d(E^*; D) = |\overrightarrow{AD}| = 8 \text{ [LE]}$$

c) Da die Vektoren paarweise zueinander orthogonal sind, kann man sowohl den Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowie das Volumen der Pyramide ABCD direkt bestimmen:

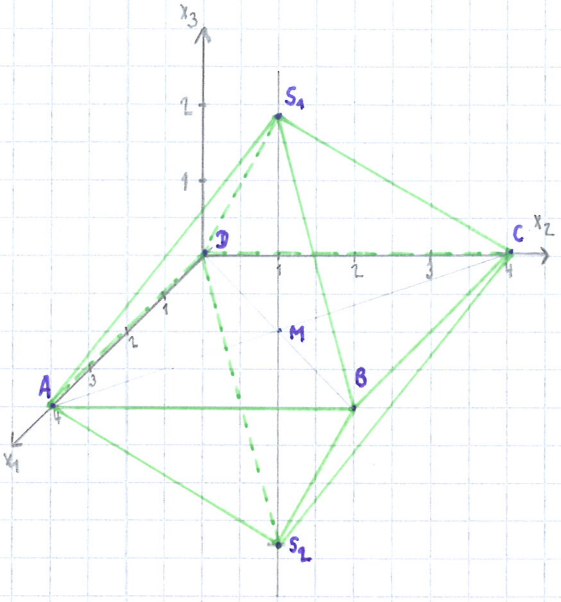
- $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{81+0+144} \cdot \sqrt{256+0+144} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$ [FE]
- $V_{Py\,ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot d(E^*; D) = \frac{1}{3} \cdot 150 \cdot 8 = 400$ [VE]

d) PQ liegt in $E^*: x_2 = -2$; ST liegt in einer parallelen Ebene zu E^*, die von E^* halb so weit entfernt ist wie der Punkt D (da nach Aufgabenstellung die Punkte S und T die Kantenmitten von BD bzw. AD sind).

$$\Rightarrow d(PQ; ST) = \frac{1}{2} \cdot d(E^*; D) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ [LE]}$$

LS S. 292 / Aufgabe 13 a

Skizze (für a = 4 cm):



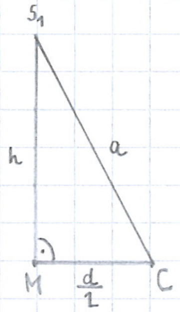
Koordinaten (der Oktaeder kann auch anders im Koordinatensystem eingebettet werden)

$A(a|0|0)$; $B(a|a|0)$; $C(0|a|0)$; $D(0|0|0)$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}$ $M(\frac{a}{2}|\frac{a}{2}|0)$

Bestimmung der Höhe (Satz des Pythagoras):

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$



$h^2 = a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2$

$\Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$S_1(\frac{a}{2}|\frac{a}{2}|\frac{a}{2}\sqrt{2})$

$S_2(\frac{a}{2}|\frac{a}{2}|-\frac{a}{2}\sqrt{2})$

Wahl zweier windschiefer Kanten des Oktaeders:

$DA: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$; $a, t \in \mathbb{R}$ $\quad S_1C: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\-\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $a, s \in \mathbb{R}$

$DA: \vec{x} = a \cdot t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $a, t \in \mathbb{R}$ $\quad S_1C: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix} + \frac{a}{2} \cdot s \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $a, s \in \mathbb{R}$

Hilfsebene H^* konstruieren, die S_1C enthält und zu DA parallel verläuft:

(Substitution der Parameter: $a \cdot t \hat{=} v$; $\frac{a}{2} \cdot s \hat{=} u$)

$H^*: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

n_1	n_2	n_3	
1	-1	$\sqrt{2}$	0
1	0	0	0

$\Rightarrow n_2 = \sqrt{2}\, n_3$ $\quad$ wähle $n_3 = 1$; $n_2 = \sqrt{2}$ $\Bigg\}$ $\overrightarrow{n_{H^*}} = \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow n_1 = 0$

$H^*: [\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} = 0$

$\underline{H^*: \sqrt{2}\, x_2 + x_3 = \sqrt{2}\, a}$

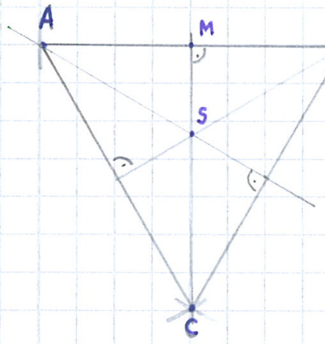
Abstand von $D(0|0|0) \hat{=}$ Stützpunkt von DA zu H^*:

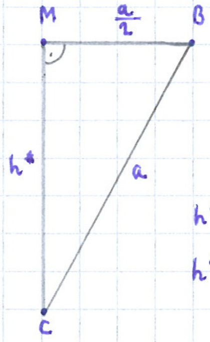
HNF von H^*: $\frac{\sqrt{2}\, x_2 + x_3 - \sqrt{2}\, a}{\sqrt{3}} = 0$

$d(D; H^*) = \left|\frac{-\sqrt{2}\, a}{\sqrt{3}}\right| = \underline{\underline{\frac{a}{3}\sqrt{6}\ [LE]}}$

LS S. 292 / Aufgabe 13b

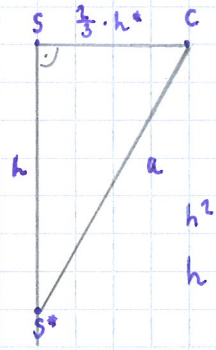
Skizze ($a = 4$ cm):





$h^{*2} = a^2 - (\frac{a}{2})^2$

$h^* = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



$h^2 = a^2 - \frac{2}{3}\cdot(\frac{a}{2}\sqrt{3})^2$

$h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

Koordinaten: $A(0|0|0)$ $B(0|a|0)$ $C(\frac{a}{2}\sqrt{3}\,|\,\frac{a}{2}\,|\,0)$

Schwerpunkt S des ΔABC: $S(\frac{a}{6}\sqrt{3}\,|\,\frac{a}{2}\,|\,0)$

Spitze S^* des Tetraeders: $S^*(\frac{a}{6}\sqrt{3}\,|\,\frac{a}{2}\,|\,\frac{a}{3}\sqrt{6})$

Wahl zweier windschiefer Kanten:

$AB: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix};\ a,r \in \mathbb{R}$ $\qquad CS: \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{a}{2}\sqrt{3}\\\frac{a}{2}\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-\frac{a}{3}\sqrt{3}\\0\\\frac{a}{3}\sqrt{6}\end{pmatrix};\ a,t\in\mathbb{R}$

$AB: \vec{x} = a\cdot r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ a,r\in\mathbb{R}$ $\qquad CS: \vec{x} = \frac{a}{2}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a\cdot t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix};\ a,t\in\mathbb{R}$

Hilfsebene H^* konstruieren, die CS enthält und zu AB parallel verläuft:

(Substitution der Parameter: $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a\cdot t \mathrel{\hat=} u$; $a\cdot r \mathrel{\hat=} v$)

$H^*: \vec{x} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ u,v\in\mathbb{R}$

n_1	n_2	n_3	
-1	0	$\sqrt{2}$	0
0	1	0	0

$\Rightarrow n_1 = \sqrt{2}\,n_3$; wähle $n_3 = 1 \Rightarrow n_1 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow n_2 = 0$

$\vec{n}_{H^*} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

$H^*: [\vec{x} - \frac{a}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\\0\end{pmatrix}]\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix} = 0$

$H^*: \sqrt{2}\,x_1 + x_3 = \frac{a}{2}\sqrt{6}$

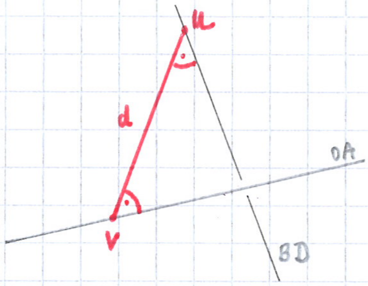
Abstand von $A(0|0|0) \mathrel{\hat=}$ Stützpunkt von AB zu H^*:

HNF von H^*: $\frac{\sqrt{2}\,x_1 + x_3 - \frac{a}{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 0$

$d(A; H^*) = \frac{|-\frac{a}{2}\sqrt{6}|}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{a}{2}\sqrt{2}\ [LE]}}$

LS. S.292 / Aufgabe 14

ges: Abstand d der zueinander windschief liegenden Kante OA: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$ und Dachdiagonalen BD: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ mithilfe der Lotfußpunkt-Methode bestimmen.



$V(5s|0|0)$ liegt auf OA.

$U(5-5r|6-3r|6r)$ liegt auf BD

$$\overrightarrow{VU} = \begin{pmatrix} 5-5r-5s \\ 6-3r \\ 6r \end{pmatrix} \quad ; \; r, s \in \mathbb{R}$$

es gilt:

I $\overrightarrow{VU} \perp \overrightarrow{OA}$: $\begin{pmatrix} 5-5r-5s \\ 6-3r \\ 6r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow 25 - 25r - 25s = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1 - s$

II $\overrightarrow{VU} \perp \overrightarrow{BD}$: $\begin{pmatrix} 5-5r-5s \\ 6-3r \\ 6r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow -25 + 25r + 25s - 18 + 9r + 36r = 0 \quad \Rightarrow \quad 70r + 25s - 43 = 0$

Setze I in II ein: $70 \cdot (1-s) + 25s - 43 \quad \Rightarrow \quad 70 - 70s + 25s - 43 = 0$

$\Rightarrow \quad s = \frac{3}{5} \quad \wedge \quad r = \frac{2}{5}$

Koordinaten der Lotfußpunkte (Parameterwerte einsetzen):

$V(3|0|0)$ liegt auf OA.

$U(3|\frac{24}{5}|\frac{12}{5})$ liegt auf BD.

Bestimmung des Abstandes $d(OA; BD) = |\overrightarrow{VU}|$:

$$\overrightarrow{VU} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{24}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \; ; \; |\overrightarrow{VU}| = \sqrt{0 + \frac{576}{25} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12}{5}\sqrt{5} \; [LE]$$

LS S. 292 / Aufgabe 16

a) geg.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}; \quad a, t \in \mathbb{R}$

x_2-Achse $a_2: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$

ges.: Lagebeziehung von g und x_2-Achse (a_2)

$g \cap a_2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a, t, r \in \mathbb{R}$

$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad a, t, r \in \mathbb{R}$

t	r		
1	0	0	$\Rightarrow t = 0$
0	-1	0	$\Rightarrow r = 0$
a	0	-1	$\Rightarrow a \cdot 0 + 0 \neq -1$ (Widerspruch!)

$\Rightarrow$ Für alle $a \in \mathbb{R}$ liegt g windschief zur x_2-Achse.

b) geg.: $d(g; a_2) \geq \frac{1}{2}$

ges.: Parameter a

Parallele Hilfsebene H^* zu a_2, die g enthält:

$H^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a, t, r \in \mathbb{R}$

n_1	n_2	n_3	
1	0	a	0
0	1	0	0

$n_1 = -a n_3$; wähle $n_3 = -1$; $n_1 = a$

$n_2 = 0$

$H^*: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$H^*: \quad a x_1 - x_3 = -1$

HNF von H^*: $\dfrac{a x_1 - x_3 + 1}{\sqrt{a^2 + 1}} = 0$

$d(0; H^*) = \dfrac{|1|}{\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} \leq 2 \quad | \; (\;)^2$

$a^2 + 1 \leq 4 \quad | -1$

$a^2 \leq 3$

$\Rightarrow \quad a_1 \leq \sqrt{3} \quad \wedge \quad a_2 \geq -\sqrt{3}$