Musterlösung Aufgabe 292/15

a) Variante A: Abstandsbestimmung mit Hilfsebene:

$$f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 34{,}2 \\ 15{,}3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor zwischen Hilfsebene und Gerade bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Normaleneinheitsvektor bestimmen:

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{77}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Abstand nach Hesse bestimmen:

$$d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left(\begin{pmatrix} 20 \\ 34{,}2 \\ 15{,}3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{77}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \approx 0{,}091 km = 91 m$$

Der Abstand zwischen den beiden Flugbahnen beträgt ca. 91m

a) Variante B: Abstandbestimmung durch Wahl allgemeiner Punkte auf $f_1 + f_2$:

$$P_1(r|2r|r)\ auf\ f_1 \quad und \quad P_2(20 - 2s|34{,}2 + 2s|15{,}3 + 3s)\ auf\ f_2$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \left(\begin{pmatrix} 20 - 2s \\ 34{,}2 + 2s \\ 15{,}3 + 3s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ r \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 20 - 2s - r \\ 34{,}2 + 2s - 2r \\ 15{,}3 + 3s - r \end{pmatrix}$$

Orthogonalität zu Richtungsvektoren nutzen:

$$I:\ \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad und \quad II:\ \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$I: \begin{pmatrix} 20 - 2s - r \\ 34{,}2 + 2s - 2r \\ 15{,}3 + 3s - r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad und \quad II: \begin{pmatrix} 20 - 2s - r \\ 34{,}2 + 2s - 2r \\ 15{,}3 + 3s - r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$I:\quad 6r - 103{,}7 - 5s = 0$
$II:\quad 5r - 74{,}3 - 17s = 0$

LGS lösen $\Rightarrow \quad r = 18{,}070 \quad und \quad s = 0{,}944$ und einsetzen in P_1 bzw. P_2
$\Rightarrow \quad P_1(18{,}070|36{,}140|18{,}070)$
$\Rightarrow \quad P_2(18{,}112|36{,}091|18{,}132)$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \left| \begin{pmatrix} 20 - 2 \cdot 0{,}944 - 18{,}070 \\ 34{,}2 + 2 \cdot 0{,}944 - 2 \cdot 18{,}070 \\ 15{,}3 + 3 \cdot 0{,}944 - 18{,}070 \end{pmatrix} \right| \approx 0{,}091 km = 91 m$$

Kommentar [K1]: Kann auch weggelassen werden!

Kommentar [K2]: Kreuzprodukt!

Kommentar [K3]: Skalarprodukt!

Kommentar [K4]: Skalarprodukt!

Kommentar [K5]: $\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

<u>a) Wie lange nach Beobachtungsbeginn befinden sich die Flugzeuge jeweils an diesem Punkt?</u>
Hierzu benötigen wir eine Darstellung in die der Zeitfaktor einfließt:

$$f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 300 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kommentar [K6]: Geschwindigkeit von Flugzeug 1

Kommentar [K7]: normierter RV

$$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 34{,}2 \\ 15{,}3 \end{pmatrix} + 400 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kommentar [K8]: Geschwindigkeit von Flugzeug 2

Kommentar [K9]: normierter RV

$mit\ t \epsilon \mathbb{R}\ als\ Zeit\ in\ Stunden\ seit\ Beobachtungsbeginn.$

Das Flugzeug 1 ist nach der Zeit t_1 am Punkt P_1:
Durch Gleichsetzten mit f_1 ergibt sich t_1:

$$\overrightarrow{OP_1} = \vec{x}_{f_1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 18{,}070 \\ 36{,}140 \\ 18{,}070 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 300 \cdot t_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t_1 \approx 0{,}148h \approx 8{,}88min$$

Das Flugzeug 2 ist nach der Zeit t_2 am Punkt P_2:
Durch Gleichsetzten mit f_2 ergibt sich t_2:

$$\overrightarrow{OP_2} = \vec{x}_{f_2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 18{,}112 \\ 36{,}091 \\ 18{,}132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 34{,}2 \\ 15{,}3 \end{pmatrix} + 400 \cdot t_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t_2 \approx 0{,}0097h \approx 0{,}584min$$

<u>Antwort</u>: Flugzeug 1 ist nach ca. 8,9 Minuten, Flugzeug 2 ist nach ca. 5,8 Minuten am Punkt mit der kürzesten Entfernung **zur Flugbahn** des anderen Flugzeuges angekommen.

<u>b) kleinster Abstand zwischen den beiden Flugzeugen:</u>

Da nun in beiden Geradendarstellungen f_1 und f_2 der gleiche Parameter vorhanden ist, können wir auf jeder Geraden einen allgemeinen Punkt wählen und dessen Ortsvektor angeben mit:

$$\overrightarrow{OQ_1} = \frac{300t}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OQ_2} = \begin{pmatrix} 20 \\ 34{,}2 \\ 15{,}3 \end{pmatrix} + 400 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Länge zwischen Q_1und Q_2 kann damit angegeben werden mit:

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \begin{pmatrix} 20 + 400 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot (-2) - \frac{300t}{\sqrt{6}} \\ 34{,}2 + 400 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 2 - \frac{300t}{\sqrt{6}} \cdot 2 \\ 15{,}3 + 400 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 3 - \frac{300t}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{Q_1Q_2}| = \sqrt{(20 + 400 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot (-2) - \frac{300t}{\sqrt{6}})^2 + (34{,}2 + 400 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 2 - \frac{300t}{\sqrt{6}} \cdot 2)^2 + (15{,}3 + 400 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 3 - \frac{300t}{\sqrt{6}})^2}$$

Das Minimum von der "Funktion" $|\overrightarrow{Q_1Q_2}|$ liefert $t \approx 0{,}042h \approx 2{,}5min$.
t eingesetzt in $|\overrightarrow{Q_1Q_2}|$ ergibt den Abstand von 39,67km.

Kommentar [K10]: Laut Fragestellung nicht notwendig.

<u>Antwort</u>: Die beiden Flugzeuge haben nach ca. 2,5 Minuten den kleinsten Abstand.