LS S. 306 / Aufgabe 3

geg: $P(2r+3s \mid r-2s \mid 4r-s)$; $r, s \in \mathbb{R}$
$E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

ges: $d(P;E)$; geometrische Menge aller Punkte $P_{r,s}$

Lösungsansatz I: P ist ein beliebiger, "wandernder" Punkt auf einer Ebene F, die in Parameterform dargestellt ist:

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2r+3s \\ r-2s \\ 4r-s \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \; r, s \in \mathbb{R},$$

wobei der Origo $O(0|0|0)$ der Stützvektor von F ist. Da alle Punkte auf F von der Ebene E den gleichen Abstand besitzen sollen, müssen F und E parallel zueinander liegen, aber nicht identisch sein.

Lagebeziehung zwischen F und E: Der Normalenvektor $\vec{n_E}$ von E muss orthogonal auf den Spannvektoren $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ von F stehen.

$$\text{I} \quad \vec{n_E} \cdot \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2+2-4 = 0$$

$$\text{II} \quad \vec{n_E} \cdot \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3-4+1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E \parallel F}$$

Sind E und F identisch? Punktprobe von $O \in F$ in E:
$0 + 0 - 0 = 0 \neq 6$
$\Rightarrow \underline{O \notin E}$

$\Rightarrow$ E und F liegen (echt) parallel zueinander. Alle Punkte P liegen auf einer zu E parallelen Ebene F mit der Gleichung $\underline{F: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0}$.

Lösungsansatz II: Den konkreten Abstand $d(P;E)$ mithilfe der HNF von E bestimmen.

HNF von E: $\dfrac{x_1 + 2x_2 - x_3 - 6}{\sqrt{6}} = 0$

$$d(P;E) = \frac{|2r+3s+2(r-2s)-(4r-s)-6|}{\sqrt{6}} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \underline{\sqrt{6}\ [LE]}$$

$\Rightarrow$ Alle Punkte P haben den von den Parametern r und s unabhängigen gleichen Abstand $d(P;E) = \underline{\sqrt{6}}$ [LE]

Die Aufgabenstellung verlangt, dass P als "wandernder" Punkt einer Ebene identifiziert wird.

Parameter- und Koordinatenform dieser Ebene F: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$

$F: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

(vgl. oben!)

LS S. 306 / Aufgabe 8

geg: $A(-2|4|6)$; $B(6|4|4)$; $C(4|0|8)$; $D(8|0|7)$

a) ges: Beweis, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.

- Vektoren und deren Beträge aufstellen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6+2 \\ 4-4 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+0+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ [LE]}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 0-4 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6 \text{ [LE]}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ 0-0 \\ 7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{16+0+1} = \sqrt{17} \text{ [LE]}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8+2 \\ 0-4 \\ 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{100+16+1} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \text{ [LE]}$$

I $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 2$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind linear abhängig; d.h. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

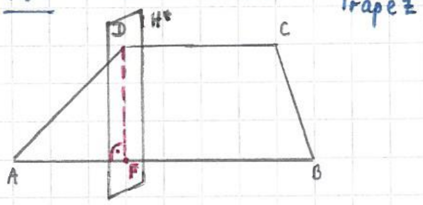
$\overrightarrow{BC} \neq k^* \cdot \overrightarrow{AD}$

Die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind linear unabhängig; d.h. $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{AD}$

II $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{CD}| \neq |\overrightarrow{AD}|$

$\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Trapez.

b) ges: Flächeninhalt A_{Trapez}



$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|) \cdot |\overrightarrow{DF}|$$

$$AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$$

$$H^*: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4x_1 - x_3 = 25$$

$H^* \cap AB = \{F\}$: $4(-2+4r) - 6 + r - 25 = 0 \Rightarrow 17r = 39 \Rightarrow r = \frac{39}{17}$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{156}{17} \\ 4 + 0 \\ 6 - \frac{39}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{122}{17} \\ 4 \\ \frac{63}{17} \end{pmatrix} \qquad F\left(\frac{122}{17} \middle| 4 \middle| \frac{63}{17}\right)$$

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \frac{122}{17} - 8 \\ 4 - 0 \\ \frac{63}{17} - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{17} \\ 4 \\ -\frac{56}{17} \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{DF}| = \frac{1}{17} \cdot \sqrt{196 + 4624 + 3136} = \frac{1}{17}\sqrt{7956} = 6\sqrt{\frac{13}{17}}$$

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{17} + \sqrt{17}) \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{13}{17}}$$

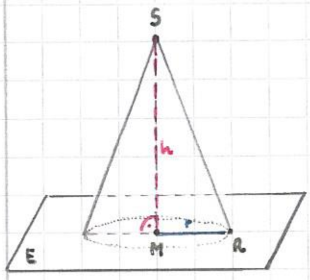
$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{17} \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{13}{17}}$$

$$A_{Trapez} = 9\sqrt{13} \text{ [FE]} \approx 32{,}45 \text{ [FE]}$$

LS S. 306 / Aufgabe 9

geg: Spitze $S(8|14|8)$ eines Kreiskegels, dessen Grundfläche in der Ebene $E: 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = \frac{81}{2}$ liegt und dessen Radius $r = |\overrightarrow{MR}| = \sqrt{65}$ [LE] beträgt.

a) **ges:** Kegelvolumen $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi\, |\overrightarrow{MR}|^2 \cdot |\overrightarrow{MS}|$



Kegelhöhe ≙ Lotgerade auf E durch S:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Bestimmung von M: $h \cap E = \{M\}$

$$4(8+4t) + 7(14+7t) + 4(8+4t) = \frac{81}{2}$$
$$32 + 16t + 98 + 49t + 32 + 16t = \frac{81}{2}$$
$$81t = -\frac{243}{2}$$
$$t = -\frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 8-6 \\ 14-10{,}5 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_{Kegel}(2|3{,}5|2)$

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 14-3{,}5 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{MS}| = \sqrt{36 + \frac{441}{4} + 36} = \sqrt{\frac{729}{4}} = \underbrace{\frac{27}{2}\ [LE]}_{\hat{=}\, h_{Kegel}}$$

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{65})^2 \cdot \frac{27}{2} = \frac{585}{2}\pi = 292{,}5\,\pi \approx 918{,}92\ [VE]$$

Anmerkung: Man hätte die Höhe des Kreiskegels auch per Abstandsbetrachtung von S zur Ebene E mithilfe der HNF von E ermitteln können.

b) **ges:** Koordinaten von $R(2|r_2|r_3)$ in E

Punktprobe:
$$4 \cdot 2 + 7r_2 + 4r_3 = \frac{81}{2}$$
$$7r_2 + 4r_3 = \frac{65}{2}$$
$$r_3 = \frac{65}{8} - \frac{7}{4} r_2$$

$$\Rightarrow R\left(2 \,\middle|\, r_2 \,\middle|\, \frac{65}{8} - \frac{7}{4} r_2\right)$$

Mögliche Koordinaten von R:

- wähle $r_2 = 0$: $R_1\left(2|0|\frac{65}{8}\right)$
- wähle $r_2 = -\frac{1}{2}$: $R_2\left(2|-\frac{1}{2}|9\right)$
- wähle $r_2 = \frac{1}{14}$: $R_3\left(2|\frac{1}{14}|8\right)$

LS S. 307 / Aufgabe 10 a

geg: $A(0|0|0)$; $B(15|21|3)$; $C(37|5|5)$; $D(22|-16|2)$

ges: Identität des Vierecks ABCD

· Ebene E aufstellen, die die Punkte A, B und C beinhaltet:

$E: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 37 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ (A(0|0|0) ist Stützvektor!)

n_1	n_2	n_3	
5	7	1	0
37	5	5	0
-25	-35	-5	0
12	-30	0	0

$\Rightarrow n_3 = -5n_1 - 7n_2 \Rightarrow n_3 = -25 - 14 = -39$

$\Rightarrow 2n_1 = 5n_2 \Rightarrow n_1 = \frac{5}{2} n_2$; wähle $n_2 = 2$; $n_1 = 5$

$E: 5x_1 + 2x_2 - 39x_3 = 0$

Punktprobe von D in E: $5 \cdot 22 + 2 \cdot (-16) - 39 \cdot 2 = 110 - 32 - 78 = 0 \Rightarrow D \in E$

$\Rightarrow$ ABCD liegen in einer gemeinsamen Ebene $E: 5x_1 + 2x_2 - 39x_3 = 0$.

· Vektoren und deren Beträge aufstellen:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{225 + 441 + 9} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}$ [LE]

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 22-37 \\ -16-5 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -21 \\ -3 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{225 + 441 + 9} = 15\sqrt{3}$ [LE]

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = 15\sqrt{3}$ [LE]

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 37-15 \\ 5-21 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{484 + 256 + 4} = \sqrt{744} = 2\sqrt{186}$ [LE]

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 22 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{484 + 256 + 64} = 2\sqrt{186}$ [LE]

$\Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{186}$ [LE]

d.h. gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

· außerdem gilt: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix} = 330 - 336 + 6 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

Nach dem Kongruenzsatz sws ist das Viereck ABCD eindeutig als Rechteck identifizierbar.

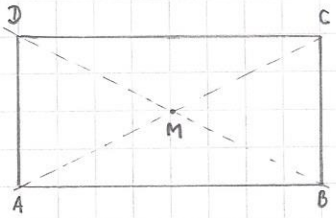
Anmerkung: Die Punkte A, B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene, wenn die drei Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear abhängig sind.
Folglich hätte der Beweis der linearen Abhängigkeit der Vektoren ebenso die Aufgabenstellung erfüllt.

LS S. 307 / Aufgabe 10 b

geg: Spitze $S(s_1 | 0 | s_3) \in x_1x_3$ - Ebene einer Pyramide, die das Rechteck ABCD als Grundfläche besitzt.

ges: Koordinaten von S sowie $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_{Py}$

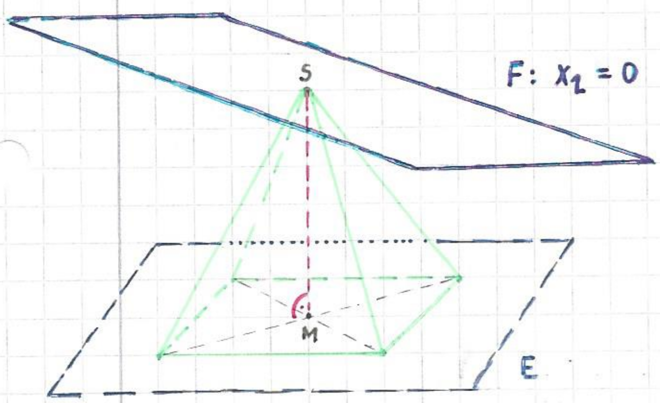
$A_{Rechteck\,ABCD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = 15 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{186} = \underline{90\sqrt{62}}$ [FE]



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+37 \\ 0+5 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$M(18,5 | 2,5 | 2,5)$



- senkrechtes Lot h von S durch $M \in E$:

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -39 \end{pmatrix}; u \in \mathbb{R}$

- Punktprobe von $S(s_1 | 0 | s_3)$ in h:

$\begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -39 \end{pmatrix}; u \in \mathbb{R}$

aus II folgt: $0 = 2,5 + 2u$
$\Rightarrow 2u = -\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{u = -\frac{5}{4}}$

Paramter in (I) und (III) einsetzen:

- $s_1 = 18,5 + (-\frac{5}{4}) \cdot 5 = \frac{37}{2} - \frac{25}{4} = \frac{49}{4} = 12,25$
- $s_3 = 2,5 + (-\frac{5}{4}) \cdot (-39) = \frac{5}{2} + \frac{195}{4} = \frac{205}{4} = 51,25$

$\Rightarrow \underline{\underline{S(12,25 | 0 | 51,25)}}$

$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 12,25 - 18,5 \\ 0 - 2,5 \\ 51,25 - 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,25 \\ -2,5 \\ 48,75 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -25 \\ -10 \\ 195 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{MS}| = \frac{1}{4}\sqrt{625 + 100 + 38025} = \frac{1}{4}\sqrt{38750} = \underline{\frac{25}{4}\sqrt{62}} \mathrel{\hat{=}} h_{Py}$

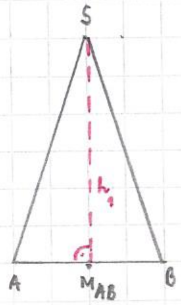
$\underline{V_{Py}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 90\sqrt{62} \cdot \frac{25}{4}\sqrt{62} = \underline{\underline{11.625 \text{ [VE]}}}$

LS. S.307 / Aufgabe 10c

ges: Oberflächeninhalt der Pyramide $O_{Py} = M_{Py} + G_{Py}$

- $G_{Py} = A_{Rechteck} = 90\sqrt{62} \approx 708{,}66$ [FE] (s. Teilaufgabe b)

- Bestimmung der Mantelfläche M:



I. gleichschenkliges Dreieck ΔABS:

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+15 \\ 0+21 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 10{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

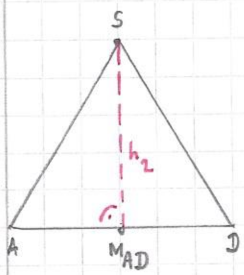
$$\overrightarrow{M_{AB}S} = \begin{pmatrix} 12{,}25-7{,}5 \\ 0-10{,}5 \\ 51{,}25-1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ -10{,}5 \\ 49{,}75 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 19 \\ -42 \\ 199 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{M_{AB}S}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{361+1764+39601} = \frac{1}{4}\sqrt{41726}$$

$$A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_{AB}S}\right|$$

$$A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} \cdot 15\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{41726} = \frac{15}{8}\sqrt{125178}$$

$$A_{\Delta ABS} \approx 663{,}38 \text{ [FE]}$$



II gleichschenkliges Dreieck ΔADS:

$$\overrightarrow{OM_{AD}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0+22 \\ 0-16 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_{AD}S} = \begin{pmatrix} 12{,}25-11 \\ 0+8 \\ 51{,}25-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 8 \\ 50{,}25 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 32 \\ 201 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{M_{AD}S}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{25+1024+40401} = \frac{1}{4}\sqrt{41450}$$

$$A_{\Delta ADS} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_{AD}S}\right|$$

$$A_{\Delta ADS} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{186}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{41450} = \frac{5}{2}\sqrt{77097}$$

$$A_{\Delta ADS} \approx 694{,}16 \text{ [FE]}$$

Mantelfläche $M = 2\cdot A_{\Delta ABS} + 2\cdot A_{\Delta ADS} \approx 2715{,}09$ [FE]

- Bestimmung des Oberflächeninhalts der Pyramide:

$$O_{Py} = 708{,}66 \text{ [FE]} + 2715{,}09 \text{ [FE]}$$

$$O_{Py} = 3423{,}74 \text{ [FE]}$$

LS S. 307 / Aufgabe 14

geg: $E_K: \; x_1 + (K-1)\,x_2 + (K+1)\,x_3 = 5 \; ; \; K \in \mathbb{R}$

g durch $A(-4|5|4)$ und $B(-3|7|2)$

ges: K, sodass der Schnittwinkel α von E_K und g $30°$ beträgt.

a) $\vec{r_g} = \begin{pmatrix} -3+4 \\ 7-5 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{r_g}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$\vec{n_{E_K}} = \begin{pmatrix} 1 \\ K-1 \\ K+1 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{n_{E_K}}| = \sqrt{1 + K^2 - 2K + 1 + K^2 + 2K + 1} = \sqrt{2K^2+3}$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ K-1 \\ K+1 \end{pmatrix}\right|}{3 \cdot \sqrt{2K^2+3}} = \frac{|1+2K-2-2K-2|}{3\sqrt{2K^2+3}} = \frac{|-3|}{3\sqrt{2K^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{2K^2+3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2K^2+3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2K^2+3} = 2 \Rightarrow 2K^2+3 = 4 \Rightarrow 2K^2 = 1$$

$$\Rightarrow K^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow K = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \; ; \quad \underline{\underline{K = \frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

b) ges: maximaler Schnittwinkel α_{max} zwischen g und E

allgemeine Bdg.: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2K^2+3}}$

α wird maximal, wenn $\frac{1}{\sqrt{2K^2+3}}$ maximal wird.

Dies ist der Fall, wenn der Term im Nenner möglichst klein wird; d.h. die Diskriminante unter der Wurzel im Nenner $d(K) = 2K^2+3$ muss ein Minimum besitzen.

Ableitungen: $d'(K) = 4K \quad d''(K) = 4$

I notwendige Bdg $d'(K) = 0$: $4K = 0 \Rightarrow K = 0$

II hinreichende Bdg $d'(K) = 0 \wedge d''(K) \neq 0$: $d''(0) = 4 > 0 \rightarrow$ min.

III Funktionswert: $d(0) = 3$

$\Rightarrow$ Für $\underline{\underline{K = 0}}$ besitzt die Diskriminante $d(0) = 3$ ein Minimum;

daher gilt für den maximalen Schnittwinkel α zwischen g und E:

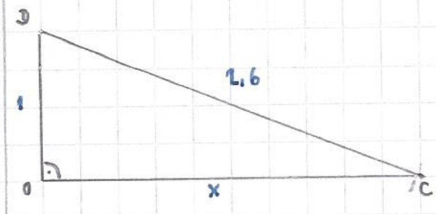
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 35{,}26°}}$$

LS S. 309 / Aufgabe 21

geg: schräg im Raum liegendes Brett (2,6 m x 1 m), dessen linke Kante 1 m über dem Boden an der Wand lehnt und dessen rechte Kante am Boden aufliegt. Unterhalb des Brettes am Boden liegend und die linke Wand berührend befindet sich ein Ball mit unbekanntem Durchmesser d.

ges: Durchmesser d des Balls

· Bestimmung der Koordinaten:



Satz des Pythagoras:

$x^2 + 1^2 = 2{,}6^2 \Rightarrow x^2 = 5{,}76$

$\Rightarrow \underline{x = 2{,}4\ [m]}$

Hintere Ebene ($x_1 = 0$): $O(0|0|0)$; $C(0|2{,}4|0)$; $D(0|0|1)$
Vordere Ebene ($x_1 = 1$): $E(1|0|0)$; $B(1|2{,}4|0)$; $A(1|0|1)$

· Bestimmung der jeweiligen Ebenen:

I Boden: $x_1 x_2$ - Ebene: $\underline{x_3 = 0}$

II. linke Wand: $x_1 x_3$ - Ebene: $\underline{x_2 = 0}$

III Brett: ABCD $\hat{=}$ $B: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\2{,}4\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\2{,}4\\-1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

n_1	n_2	n_3	
0	2,4	-1	0
-1	2,4	-1	0

$\Rightarrow n_3 = \frac{12}{5} n_2$; wähle $n_2 = 5$; $n_3 = 12$

$\Rightarrow n_1 = 0$

$B: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\12\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{B: 5x_2 + 12x_3 = 12}$

HNF von B: $\frac{5x_2 + 12x_3 - 12}{13} = 0$

· Abstandsbestimmung von $M(r|r|r) \hat{=}$ Ballmittelpunkt zu den Ebenen:

① $d(M; x_3 = 0) \hat{=} d(M; x_2 = 0) = |r|$ (Abstand zum Boden und zur linken Wand)

② $d(M; B) = \frac{|5r + 12r - 12|}{13} = \frac{|17r - 12|}{13}$ (Abstand zum Brett)

① = ②: $|r| = \frac{|17r - 12|}{13}$

a) $r = \frac{17r - 12}{13} \Rightarrow 13r = 17r - 12 \Rightarrow \underline{r = 3}$; entfällt, da $\underline{r < 1}$

b) $-r = \frac{17r - 12}{13} \Rightarrow -13r = 17r - 12 \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{2}{5}\ [m]}}$

Der Ball besitzt die Mittelpunktskoordinaten $\underline{\underline{M\left(\frac{2}{5} \middle| \frac{2}{5} \middle| \frac{2}{5}\right)}}$ und den Durchmesser $d = 2 \cdot r = \frac{4}{5}\ m = \underline{\underline{0{,}8\ m}}$.