LS S. 46 / Aufgabe 6 a

geg: $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2$; $x \in \mathbb{R}$

- Ableitungen: $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ $\quad f''(x) = -x + 2$ $\quad f'''(x) = -1$

- Nullstellen $f(x) = 0$: $\quad -\frac{1}{6}x^2 \cdot (x - 6) = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle) $\quad$ $\underline{\underline{N_1(0|0)}}$ (hat waagerechte Tangente)

$x_2 = 6$ $\quad$ $\underline{\underline{N_2(6|0)}}$

- Extrema:

I notwendige Bdg $f'(x) = 0$: $\quad -\frac{1}{2}x \cdot (x - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$; $x_2 = 4$

II hinreichende Bdg $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$: $\quad f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ min

$f''(4) = -2 < 0 \rightarrow$ max

III Funktionswerte $\quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T(0|0)}} \;\hat{=}\; N_1$

$f(4) = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{H(4|5\frac{1}{3})}}$

- Wendepunkt:

I notwendige Bdg $f''(x) = 0$: $\quad -x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

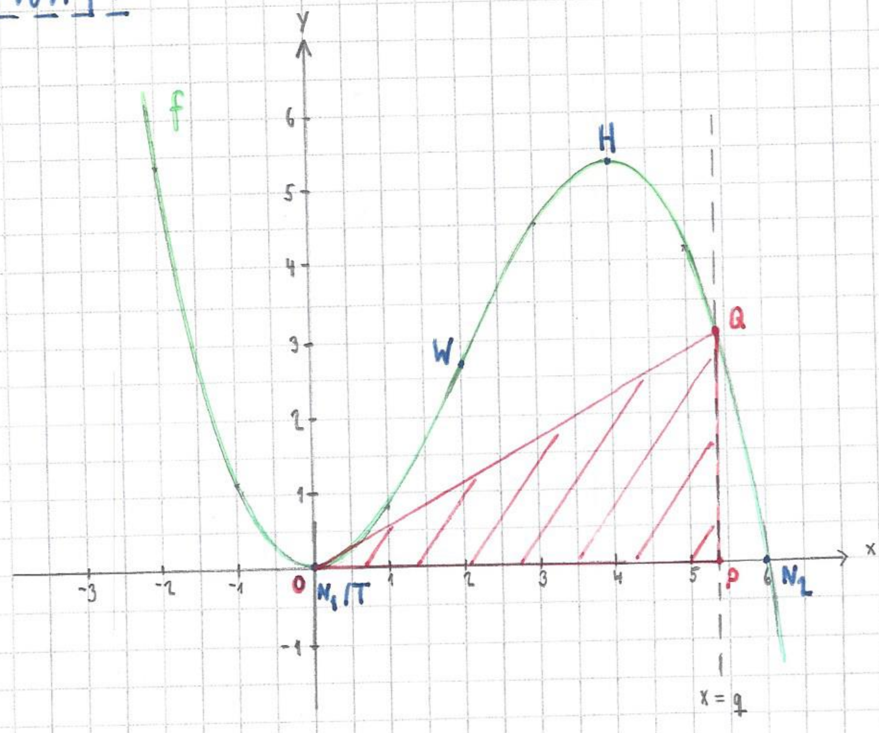
II hinreichende Bdg $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$: $\quad f'''(2) = -1 < 0$; d.h. f' besitzt ein Maximum

$\Rightarrow$ Links-Rechts-WP

III Funktionswert $\quad f(2) = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{W(2|2\frac{2}{3})}}$

Da f' in W ein Maximum besitzt, ist die maximale Steigung $\underline{\underline{f'(2) = 2.}}$

- Schaubild von f:



LS S. 46 / Aufgabe 6 b + c

b) · Gleichung der Wendetangente: $y = f'(2) \cdot x + c$

$f'(2) = 2$; $W(2 \mid \frac{8}{3})$ $\Rightarrow$ $\frac{8}{3} = 2 \cdot 2 + c$ $\Rightarrow$ $c = -\frac{4}{3}$

$t_w: \; y = 2x - \frac{4}{3}$

· Die 1. Ableitung gibt die Steigung der Tangente an: $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

Bedingung: $f'(x) \cdot f'(2) = -1$

$\Rightarrow \quad (-\frac{1}{2}x^2 + 2x) \cdot 2 = -1$

$\Rightarrow \quad -x^2 + 4x + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 1 = 0$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+1}$

$x_1 = 2 + \sqrt{5}$; $x_2 = 2 - \sqrt{5}$

Es gibt zwei Tangenten an den Graphen von f, die die Wendetangente senkrecht schneiden, nämlich an den Stellen $x_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24$
$\wedge \; x_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0{,}24$

c) Anmerkung: Fehler in der Aufgabenstellung; es muss heißen:
„Die Parallele zur y-Achse ... schneidet die x-Achse im Punkt P."

· Koordinaten: $O(0 \mid 0)$; $P(q \mid 0)$; $Q(q \mid f(q))$ (s. Schaubild Teilaufgabe a)

I. Hauptbedingung: $A = \frac{1}{2} \cdot q \cdot f(q)$

II Nebenbedingung: $f(q) = -\frac{1}{6}q^3 + q^2$

III Zielfunktion: $A(q) = \frac{1}{2}q \cdot (-\frac{1}{6}q^3 + q^2) = -\frac{1}{12}q^4 + \frac{1}{2}q^3$

IV Ableitungen: $A'(q) = -\frac{1}{3}q^3 + \frac{3}{2}q^2$ $\quad A''(q) = -q^2 + 3q$

V Extrema:

notwendige Bdg $A'(q) = 0$: $-\frac{1}{3}q^2(q - \frac{9}{2}) = 0 \Rightarrow q_1 = 0;\ q_2 = \frac{9}{2}$

hinreichende Bdg $A'(q) = 0 \wedge A''(q) \neq 0$: $A''(0) = 0$ → entfällt, da Randwert
$A''(\frac{9}{2}) = -\frac{81}{4} + \frac{27}{2} = -\frac{27}{4} < 0 \rightarrow$ max.

Funktionswert: $A(\frac{9}{2}) = -34{,}171875 + 45{,}5625 = 11{,}390625$ [FE]

VI Randwert: $A(6) = 0$

d.h. für $q = 4{,}5$ wird der Flächeninhalt mit $A(4{,}5) \approx 11{,}4$ [FE] maximal.

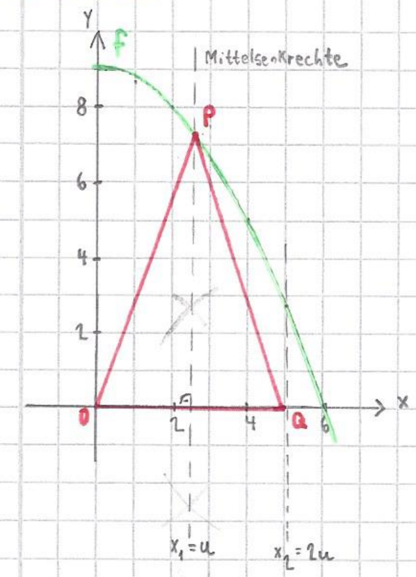
Q besitzt die Koordinaten $Q(4{,}5 \mid f(4{,}5)) \hat{=} (4{,}5 \mid 5{,}0625)$.

LS S. 46 / Aufgabe 8

geg: $f(x) = 9 - \frac{1}{4}x^2$; $x \in [0; 6]$

ges: Koordinaten der Spitze S eines gleichschenkligen Dreiecks, das von den Koordinatenachsen und dem Graphen von f so begrenzt werden soll, dass es einen maximalen Flächeninhalt besitzt.

· **Skizze:**



· **Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks:**

$O(0|0)$ $Q(2u|0)$ $P(u|f(u))$

Anmerkung: Die Spitze P des Dreiecks OQP ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{OQ}$ mit dem Graphen von f. Aufgrund der Gleichschenkligkeit des Dreiecks liegt P auf der Mittelsenkrechten der Hypotenuse $\overline{OQ}$.

I Hauptbedingung: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

II Nebenbedingungen: $g = 2u$; $h = f(u) = 9 - \frac{1}{4}u^2$

III Zielfunktion: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot (9 - \frac{1}{4}u^2)$

$$\underline{A(u) = -\frac{1}{4}u^3 + 9u}$$

IV Ableitungen: $A'(u) = -\frac{3}{4}u^2 + 9$ $A''(u) = -\frac{3}{2}u$

V Extrema:

notwendige Bdg. $A'(u) = 0$: $-\frac{3}{4}u^2 + 9 = 0 \Rightarrow u^2 = 12 \Rightarrow u = \pm 2\sqrt{3}$

da $u \in [0; -6]$; gilt: $u = 2\sqrt{3}$

hinreichende Bdg $A'(u) = 0 \wedge A''(u) \neq 0$: $A''(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} < 0 \rightarrow max$

Funktionswert der Zielfunktion: $A(2\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} \approx 20{,}785$ [FE]

VI Randextrema: $A(0) = 0 < A(2\sqrt{3})$

$A(6) = 20{,}25 < A(2\sqrt{3})$

VII Koordinaten der Dreiecksspitze P: $f(2\sqrt{3}) = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P(2\sqrt{3}|6)}}$

Wenn die Dreiecksspitze P die Koordinaten $\underline{P(2\sqrt{3}|6)}$ besitzt, ist der Flächeninhalt $A(2\sqrt{3}) = \underline{12\sqrt{3}\text{ [FE]}}$ maximal.