Nr. 13) a) $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{e^{x-b}} = \dfrac{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{e^{x-b}}$

$f(x) = \dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{e^{x-b}} = \dfrac{x^2-4}{e^{x-b}}$ Für $a = 4$ hat die Funktion die Nullstellen $+2$ und -2.

Schnitt mit y-Achse $S_y(0|-8)$:

$f(0) = \dfrac{0-4}{e^{0-b}} = -8 \,\Big|\cdot e^{0-b} \Rightarrow -4 = -8 \cdot e^{0-b} \;\Big|:(-8)$

$e^{0-b} = \frac{1}{2} \;|\ln \Rightarrow \quad -b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) | \cdot (-1) \Rightarrow b = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \underline{\underline{b}} = -(\ln(1) - \ln(2)) = -(0 - \ln(2)) = \underline{\ln(2)}$

b) Für $\underline{\underline{a < 0}}$ ist $x^2 - a > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$f(-2) = \dfrac{(-2)^2 - a}{e^{-2-b}} < 1 \Leftrightarrow (4-a)\cdot e^{2+b} < 1 \;\Big|:(4-a) > 0$

$e^{2+b} < \dfrac{1}{4-a} \;\Big|\ln \Rightarrow 2 + b < \ln\left(\frac{1}{4-a}\right) \Big| -2$

$\underline{\underline{b}} < \ln\left(\dfrac{1}{4-a}\right) - 2 = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(4-a) - 2 = \underline{\underline{-\ln(4-a) - 2}}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{e^{x-b}}$ streng monoton fallend $\Rightarrow f'(x) < 0$

Ableitung mit Quotientenregel

$f'(x) = \dfrac{2x\cdot e^{x-b} - (x^2-a)\cdot e^{x-b}}{(e^{x-b})^2} = \dfrac{\cancel{e^{x-b}}\cdot(2x - x^2 + a)}{(e^{x-b})^{\cancel{2}}} < 0$

Da der Nenner für alle $x \in \mathbb{R}$ größer als 0 ist muss Zähler < 0 sein.

$-x^2 + 2x + a$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, die kleiner als Null ist, wenn keine Nullstelle vorhanden ist.

$-x^2 + 2x + a = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-1)\cdot a}}{(-1)\cdot 2} = \dfrac{-2 \pm 2\cdot\sqrt{1+a}}{-2}$

Für $a < -1$ keine Lösung

Für $\underline{\underline{a < -1}}$ ist Zähler kleiner als $0 \Rightarrow f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ ist streng monoton fallend. Der Parameter b kann beliebig gewählt werden.

Nr. 13) d) $f'(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{-x^2+2x+a}{e^{x-b}}$ siehe b)

$f'(\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{4}+1+a}{e^{\frac{1}{2}-b}} = \frac{\frac{3}{4}+a}{e^{\frac{1}{2}-b}} = \frac{1}{2} \quad | \cdot e^{\frac{1}{2}-b}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}-a}{e^{\frac{1}{2}-b}} = \frac{1}{2} \quad | \cdot e^{\frac{1}{2}-b}$

$\frac{1}{4} - a = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}-b}$; $\frac{3}{4} + a = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}-b}$ gleichsetzen

$\Rightarrow \frac{1}{4} - a = \frac{3}{4} + a \quad | +a - \frac{3}{4}$

$\underline{2a} = \underline{-\frac{2}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \underline{| : 2} \quad \Rightarrow \underline{\underline{a = -\frac{1}{4}}}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4} - (-\frac{1}{4})}{e^{\frac{1}{2}-b}} = \frac{1}{2} \quad | \cdot e^{\frac{1}{2}-b}$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{+\frac{1}{2}-b} \quad | \cdot 2$

$1 = e^{+\frac{1}{2}-b} \quad | \ln$

$\ln(1) = +\frac{1}{2} - b$

$0 = +\frac{1}{2} - b \quad | +b$

$\underline{\underline{b = \frac{1}{2}}}$

O. Fell