Aufgabe 9

HNF von E: $\dfrac{6x_1 + 2x_2 - 3x_3}{7} = 0$

$d(P_t; E) = \dfrac{|6\cdot(2+t) + 2\cdot(1+2t) - 3t|}{7} = 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{|12 + 6t + 2 + 4t - 3t|}{7} = 5 \quad \Leftrightarrow \left|\dfrac{7t + 14}{7}\right| = 5 \quad \Leftrightarrow |t + 2| = 5$

I $\quad t + 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3$; d.h. $\underline{\underline{P_3(5|7|3)}}$

II $\quad t + 2 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad t = -7$; d.h. $\underline{\underline{P_{-7}(-5|-13|-5)}}$

Aufgabe 10

HNF von E: $\dfrac{2x_1 - x_2 - 2x_3 - 8}{3} = 0$; $\quad P_r(2+r|3+r|-5)$

$d(P_r; E) = \dfrac{|2\cdot(2+r) - (3+r) - 2\cdot(-5) - 8|}{3} = 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{|4 + 2r - 3 - r + 10 - 8|}{3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad |r + 3| = 9$

I $\quad r + 3 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad r = 6$; d.h. $\underline{\underline{P_6(8|9|-5)}}$

II $\quad r + 3 = -9 \quad \Leftrightarrow \quad r = -12$; d.h. $\underline{\underline{P_{-12}(-10|-9|-5)}}$

Aufgabe 11

HNF von E: $\dfrac{10x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 30}{15} = 0$

• x_1-Achse: $\vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\quad P_r(r|0|0)$

$d(P_r; E) = \left|\dfrac{10r - 30}{15}\right| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\tfrac{2}{3}r - 2\right| = 5$

I $\quad \tfrac{2}{3}r - 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{3}r = 7 \quad \Leftrightarrow \quad r = \tfrac{21}{2}$; $\quad \underline{\underline{P_{10,5}(10,5|0|0)}}$

II $\quad \tfrac{2}{3}r - 2 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{3}r = -3 \quad \Leftrightarrow \quad r = -\tfrac{9}{2}$; $\quad \underline{\underline{P_{-4,5}(-4,5|0|0)}}$

• x_2-Achse: $\vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\quad Q_s(0|s|0)$

$d(Q_s; E) = \left|\dfrac{2s - 30}{15}\right| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\tfrac{2}{15}s - 2\right| = 5$

I $\quad \tfrac{2}{15}s - 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{15}s = 7 \quad \Leftrightarrow \quad s = \tfrac{105}{2}$; $\quad \underline{\underline{Q_{52,5}(0|52,5|0)}}$

II $\quad \tfrac{2}{15}s - 2 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{15}s = -3 \quad \Leftrightarrow \quad s = -\tfrac{45}{2}$; $\quad \underline{\underline{Q_{-22,5}(0|-22,5|0)}}$

• x_3-Achse: $\vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\quad R_t(0|0|t)$

$d(R_t; E) = \left|\dfrac{-11r - 30}{15}\right| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left|-\tfrac{11}{15}r - 2\right| = 5$

I $\quad -\tfrac{11}{15}r - 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{11}{15}r = 7 \quad \Leftrightarrow \quad r = -\tfrac{105}{11}$; $\quad \underline{\underline{R_{-\frac{105}{11}}\left(0|0|-\tfrac{105}{11}\right)}}$

II $\quad -\tfrac{11}{15}r - 2 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{11}{15}r = -3 \quad \Leftrightarrow \quad r = \tfrac{45}{11}$; $\quad \underline{\underline{R_{\frac{45}{11}}\left(0|0|\tfrac{45}{11}\right)}}$

LS Kursstufe I Seite 112 und 113

Aufgabe 12

a) HNF von E: $\frac{4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 6}{9} = 0$

$\frac{|K-6|}{9} = 4 \Leftrightarrow |K-6| = 36$

I $K - 6 = 36 \Leftrightarrow K = 42$; $\underline{\underline{F_1: 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 42}}$

II $K - 6 = -36 \Leftrightarrow K = -30$; $\underline{\underline{F_2: 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -30}}$

b) HNF von E: $\frac{2x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 6}{7} = 0$

$\frac{|K-6|}{7} = 6 \Leftrightarrow |K-6| = 42$

I $K - 6 = 42 \Leftrightarrow K = 48$; $\underline{\underline{F_1: 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 48}}$

II $K - 6 = -42 \Leftrightarrow K = -36$; $\underline{\underline{F_2: 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -36}}$

Aufgabe 13

HNF von E: $\frac{2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 28}{7} = 0$

$d(A; E) = \frac{|4 + 9 + 36 - 28|}{7} = 3$

$\frac{|K-28|}{7} = 3 \Leftrightarrow |K-28| = 21$

I $K - 28 = 21 \Leftrightarrow K = 49$

II $K - 28 = -21 \Leftrightarrow K = 7$

Alle Punkte, die zu E den Abstand 3 besitzen, liegen in der Parallelebene

$\underline{\underline{F_1: 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 49}}$ bzw. in $\underline{\underline{F_2: 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 7}}$.

Aufgabe 14

Die Grundfläche der Pyramide liegt in der x_1x_2-Ebene; d.h. $x_3 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; & |\overrightarrow{AB}| = 4 \\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; & |\overrightarrow{BC}| = 4 \end{matrix}\right\} A = 4 \cdot 4 = 16 \text{ [FE]}$$

Die Höhe der Pyramide beträgt $h = \frac{3V}{G} = \frac{3 \cdot 192 \text{ VE}}{16 \text{ FE}} = 36 \text{ LE}$

Die Spitze S_r lautet $S_r(r|-2r|r)$ und hat von $x_3 = 0$ den Abstand 36.

$d(S_r; x_3 = 0) = |r| = 36$

I $r = 36$; d.h. $\underline{\underline{S_{36}(36|-72|36)}}$

II $r = -36$; d.h. $\underline{\underline{S_{-36}(-36|72|-36)}}$

Aufgabe 15

Die Höhe der Pyramide liegt auf der x_3-Achse, somit gilt für die Koordinaten des gesuchten Punktes $P_t(0|0|t)$; $t \in \mathbb{R}$.

Die Grundfläche der Pyramide liegt in der x_1x_2-Ebene, d.h. $x_3 = 0$

Die Seitenfläche ABS liegt in $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{6} = 1$ bzw. $3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$ ($\rightarrow$ Achsenabschnittsform).

HNF von ABS: $\frac{3x_1 + 3x_2 + x_3 - 6}{\sqrt{19}} = 0$

Es gilt:

I $d(P_t; x_3 = 0) = |t|$

II $d(P_t; ABS) = \frac{|t-6|}{\sqrt{19}}$

I = II: $|t| = \frac{|t-6|}{\sqrt{19}}$

I $t = \frac{t-6}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \sqrt{19}\,t = t-6 \Leftrightarrow t(1-\sqrt{19}) = 6 \Leftrightarrow t = \frac{6}{1-\sqrt{19}}$

$\Leftrightarrow t = \frac{6(1+\sqrt{19})}{(1-\sqrt{19})\cdot(1+\sqrt{19})} = \frac{6(1+\sqrt{19})}{1-19} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{19}$

$P_{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{19}}(0|0|-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{19})$ liegt unterhalb der Pyramide und entfällt somit als Lösung.

II $t = \frac{6-t}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \sqrt{19}\,t = 6-t \Leftrightarrow t(\sqrt{19}+1) = 6 \Leftrightarrow t = \frac{6}{\sqrt{19}+1}$

$\Leftrightarrow t = \frac{6(\sqrt{19}-1)}{19-1} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}\sqrt{19} - \frac{1}{3}$

$P_{\frac{1}{3}\sqrt{19}-\frac{1}{3}}(0|0|\frac{1}{3}\sqrt{19}-\frac{1}{3})$ bzw. $P(0|0|\sim 1{,}12)$ ist der gesuchte Punkt.

Aufgabe 16

HNF von E: $\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 5}{3} = 0$

a) $\left|\frac{k-5}{3}\right| = 5$

I $k-5 = 15 \Leftrightarrow k = 20$; d.h. $F_1: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$

II $k-5 = -15 \Leftrightarrow k = -10$; d.h. $F_2: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -10$

Aussage richtig, F_1 und F_2 sind die gesuchten Ebenen.

b) $d(E;F) = \left|\frac{10-5}{3}\right| = \frac{5}{3} \Rightarrow$ Aussage falsch; der Abstand beträgt $\frac{5}{3}$ LE.

c) Aussage falsch, auf jeder Geraden, die E schneidet, gibt es genau zwei Punkte, die den Abstand 5 LE zu E besitzen. Der eine Punkt befindet sich auf der Seite der Ebene, zu der deren Normalenvektor orientiert ist, der andere Punkt befindet sich auf der Seite der Ebene, die entgegengesetzt zum Normalenvektor orientiert ist.

d) $\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0-2+2 = 0 \Rightarrow g \parallel E$; d.h. Aussage richtig.

LS Kursstufe S. 223

Aufgabe 18

a) HNF von E: $\frac{-x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5}{3} = 0$

$d(A; E) = \frac{|-4+8+8-5|}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

$d(B; E) = \frac{|-5-4-2-5|}{3} = \frac{|-16|}{3} = 5\frac{1}{3}$

$d(C; E) = \frac{|-9-16-16-5|}{3} = \frac{|-46|}{3} = 15\frac{1}{3}$

$d(D; E) = \frac{|-2+12+12-5|}{3} = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

Die Punkte A und D liegen auf derselben Seite von E, nämlich auf jener Seite, zu der der Normalenvektor $\vec{n_E}$ von E orientiert ist. Dies sieht man am positiven Vorzeichen des Wertes in den Betragstrichen.

Die Punkte B und C liegen auf derselben Seite von E, nämlich auf jener Seite, die entgegengesetzt zum Normalenvektor $\vec{n_E}$ von E orientiert ist. Dies sieht man am negativen Vorzeichen des Wertes in den Betragstrichen.

b) Man überprüft, ob der Wert zwischen den Betragstrichen positiv oder negativ ist.
Ist dieser positiv, so liegt der Punkt auf der Seite von E, zu der der Normalenvektor $\vec{n_E}$ von E orientiert ist.
Ist dieser negativ, so liegt der Punkt auf der Seite von E, entgegen derer der Normalenvektor $\vec{n_E}$ von E orientiert ist.

Aufgabe 19

a) $F_1: 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 5 + 14 \cdot 3 \Leftrightarrow F_1: 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 47$

$F_2: 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 5 - 14 \cdot 3 \Leftrightarrow F_2: 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = -37$

d.h. die Formeln sind gültig.

b) $|\vec{n_E}| = \sqrt{36+9+4} = 7$

$F_1: 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 12 + 7 \cdot 5 \Leftrightarrow F_1: 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 47$

$F_2: 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 12 - 7 \cdot 5 \Leftrightarrow F_2: 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -23$