# LS Kursstufe Seite 118

## Aufgabe 1:

a) geg: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} -2 & & 0 \\ 6 & \times & -3 \\ 1 & \times & 1 \\ -2 & \times & 0 \end{array}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-3) - 6\cdot 0 \\ 6\cdot 1 - 1\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 - (-2)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 6+3 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{36+81+4} = \sqrt{121} = 11 \; ; \quad \vec{n_0} = \frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d(g;h) = \left| \begin{pmatrix} -3-7 \\ 0-7 \\ 5-4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{11}\cdot\left| \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{11}\cdot|-60-63+2|$$

$$\underline{\underline{d(g;h)}} = \frac{|-121|}{11} = \underline{\underline{11}}$$

b) geg: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} 0 & & -4 \\ 2 & \times & 1 \\ -3 & \times & 3 \\ 0 & \times & -4 \end{array}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 - 2\cdot(-4) \\ 2\cdot 3 - (-3)\cdot 1 \\ -3\cdot(-4) - 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+8 \\ 6+3 \\ 12-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{64+81+144} = \sqrt{289} = 17 \; ; \quad \vec{n_0} = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$d(g;h) = \left| \begin{pmatrix} 6-1 \\ 6-1 \\ 18-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{17}\cdot\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{17}\cdot|40+45+204|$$

$$\underline{\underline{d(g;h)}} = \frac{289}{17} = \underline{\underline{17}}$$

c) geg: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ 0 & \times & 1 \\ 1 & \times & 0 \\ 1 & \times & -1 \end{array}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 0\cdot(-1) \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot(-1) - 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \; ; \quad \vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d(g;h) = \left| \begin{pmatrix} 5-3 \\ 5-1 \\ 8-4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot|2-4-4|$$

$$\underline{\underline{d(g;h)}} = \frac{|-6|}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$$

d) geg: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 1 \\ 1 & & -2 \\ -3 & \times & 1 \\ 1 & \times & 1 \end{array}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2) - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - (-3)\cdot(-2) \\ -3\cdot 1 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-6 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \; ; \quad \vec{n_0} = \frac{1}{10}\sqrt{2}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d(g;h) = \left| \begin{pmatrix} 6-3 \\ 5-2 \\ -11-5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}\sqrt{2}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{10}\sqrt{2}\cdot\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{10}\sqrt{2}\cdot|-9-15+64|$$

$$\underline{\underline{d(g;h)}} = \frac{40}{10}\sqrt{2} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$$

## Aufgabe 2:

a) · $k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow k=-1$; d.h. die Richtungsvektoren sind linear abhängig.

· Setze $P(2|5|5)$ in $h$: $\begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}t=-2\\t=-5\\t=-\frac{5}{3}\end{matrix}\right\}$ unwahre Aussage; d.h. $P\notin h$

$\Rightarrow$ g und h sind echt parallel.

· Hilfsebene $H: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow H: x_1+x_2+3x_3=22$

$H\cap h=\{F\} \Leftrightarrow -t-t-9t=22 \Leftrightarrow -11t=22 \Leftrightarrow t=-2$

$\vec{OF}=-2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}$; $F(2|2|6)$

$\vec{PF}=\begin{pmatrix}2-2\\2-5\\6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$; $|\vec{PF}|=\sqrt{0+9+1}=\underline{\underline{\sqrt{10}=d(g;h)}}$

b) · $k\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}0=4 \text{ ↯}\\k=3\\k=-2\end{matrix}\right\}$ unwahre Aussagen; d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

· Da beide Geraden den gleichen Stützpunkt $\underline{\underline{S(0|1|2)}}$ besitzen, ist dieser der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden g und h.

c) · $k\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}k=0\\k=-1\\k=-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ unwahre Aussagen; d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

· Windschief oder Schnittpunkt?

$g\cap h \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+t^*\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow t\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix}+t^*\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\7\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{matrix}\text{I} & 4t=-2 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}\\ \text{II} & -\frac{1}{2}\cdot(-1)+t^*=-1 \Leftrightarrow t^*=-\frac{3}{2}\\ \text{III} & -\frac{1}{2}\cdot 6-\frac{3}{2}\cdot(-3)=-3+\frac{9}{2}=\frac{3}{2}\neq 7\end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ die Geraden g und h verlaufen windschief zueinander.

· geg: $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\1\\-6\end{pmatrix}$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$; $\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{q}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$

$\begin{matrix}1 & -1\\-6 & 3\\4 & 0\\1 & -1\end{matrix}$

$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}1\cdot 3-(-6)\cdot(-1)\\-6\cdot 0-4\cdot 3\\4\cdot(-1)-1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-6\\0-12\\-4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-12\\-4\end{pmatrix}$

$|\vec{n}|=\sqrt{9+144+16}=\sqrt{169}=13$; $\vec{n_0}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-12\\-4\end{pmatrix}$

$d(g;h)=\left|\begin{pmatrix}4-6\\0-1\\3+4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-12\\-4\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{13}\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-12\\-4\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{13}\cdot|6+12-28|$

$\underline{\underline{d(g;h)}}=\frac{1}{13}\cdot|-10|=\underline{\underline{\frac{10}{13}}}$

## Aufgabe 1

d) · $k\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 0=3 \ ↯ \\ k=0 \\ k=-\frac{1}{3}\end{array}\right\}$ unwahre Aussagen; d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

· Windschief oder Schnittpunkt?

$g\cap h \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix}+t'\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}+t'\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & -3t'=2 \Leftrightarrow t'=-\frac{2}{3} \\ \text{II} & 2t=5 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \\ \text{III} & \frac{5}{2}\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot(-1)=\frac{15}{2}+\frac{2}{3}=\frac{45+4}{6}=\frac{49}{6}\neq 0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ die Geraden g und h verlaufen windschief zueinander.

geg: $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix};\ \vec{v}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix};\ \vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix};\ \vec{q}=\begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix}$

$\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{array}$

$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}2\cdot 1-(-3)\cdot 0\\ -3\cdot 3-0\cdot 1\\ 0\cdot 0-2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0\\-9-0\\0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-9\\-6\end{pmatrix}$

$|\vec{n}|=\sqrt{4+81+36}=\sqrt{121}=11;\quad \vec{n_0}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}2\\-9\\-6\end{pmatrix}$

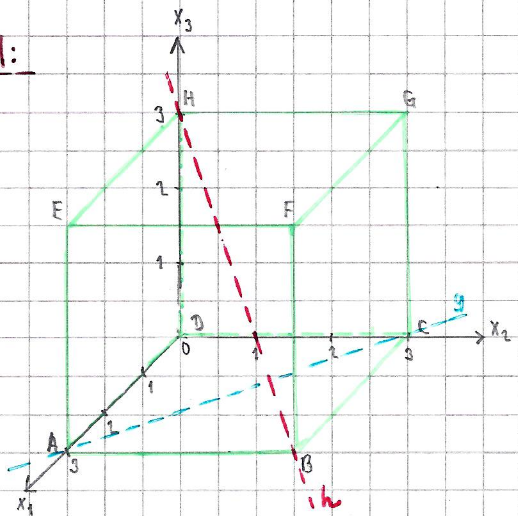
$d(g;h)=\left|\begin{pmatrix}5-3\\7-2\\1-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}2\\-9\\-6\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{11}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-9\\-6\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{11}\cdot|4-45+0|$

$\underline{\underline{d(g;h)}}=\frac{1}{11}\cdot|-41|=\frac{41}{11}=\underline{\underline{3\frac{8}{11}}}$

## Aufgabe 3:

· Koordinaten: A(3|0|0); B(3|3|0); C(0|3|0); D(0|0|0)
E(3|0|3); F(3|3|3); G(0|3|3); H(0|0|3)

· Schrägbild:




$g: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$

$h: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$

geg: $\vec{u}=\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix};\ \vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$

$\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{q}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$

$\begin{array}{cc} 3 & -3 \\ 0 & 3 \\ -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{array}$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\cdot 3-0\cdot(-3)\\ 0\cdot(-3)-(-3)\cdot 3\\ -3\cdot(-3)-3\cdot(-3)\end{pmatrix}$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}9\\9\\18\end{pmatrix}=9\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$|\vec{n}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6};\quad \vec{n_0}=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\underline{\underline{d(g;h)}}=\left|\begin{pmatrix}3-3\\3-0\\0-0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot|3|=\frac{3}{\sqrt{6}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{6}}}$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten bzw. der Diagonalen.

## LS Kursstufe Seite 118

### Aufgabe 5:

### I Abstand von AC und BD:

$AC: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

d.h. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix};\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{p} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix};\ \vec{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 2 & \times & 14 \\ 8 & \times & 0 \\ 2 & \times & 7 \\ 2 & & 14 \end{matrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 8 \cdot 14 \\ 8 \cdot 7 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 14 - 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -112 \\ 56 \\ 14 \end{pmatrix} = 14 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{64 + 16 + 1} = \sqrt{81} = 9;\quad \vec{n_0} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d(AC; BD) = \left| \begin{pmatrix} -3+9 \\ -6-3 \\ 0+3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{9} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{9} \cdot |-48 - 36 + 3|$$

$$\underline{\underline{d(AC; BD)}} = \frac{|-81|}{9} = \underline{\underline{9}}$$

### II Abstand von TU und RS:

Koordinaten: $T\left(\frac{-9+4}{2} \middle| \frac{3+8}{2} \middle| \frac{-3+0}{2}\right) \mathrel{\hat{=}} T(-2{,}5 | 5{,}5 | -1{,}5)$

$U\left(\frac{-9-7}{2} \middle| \frac{3+5}{2} \middle| \frac{-3+5}{2}\right) \mathrel{\hat{=}} U(-8 | 4 | 1)$

$R\left(\frac{-7+4}{2} \middle| \frac{5+8}{2} \middle| \frac{5+0}{2}\right) \mathrel{\hat{=}} R(-1{,}5 | 6{,}5 | 2{,}5)$

$S\left(\frac{-3+4}{2} \middle| \frac{-6+8}{2} \middle| \frac{0+0}{2}\right) \mathrel{\hat{=}} S(0{,}5 | 1 | 0)$

$TU: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 5{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -5{,}5 \\ -1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix};\ u \in \mathbb{R} \qquad RS: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 6{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix};\ v \in \mathbb{R}$

d.h. $\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix};\ \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix};\ \vec{p} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 5{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix};\ \vec{q} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 6{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} -3 & \times & -11 \\ 5 & \times & -5 \\ -11 & \times & 4 \\ -3 & & -11 \end{matrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \cdot (-5) - 5 \cdot (-11) \\ 5 \cdot 4 - (-11) \cdot (-5) \\ -11 \cdot (-11) - (-3) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 55 \\ 20 - 55 \\ 121 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -35 \\ 133 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

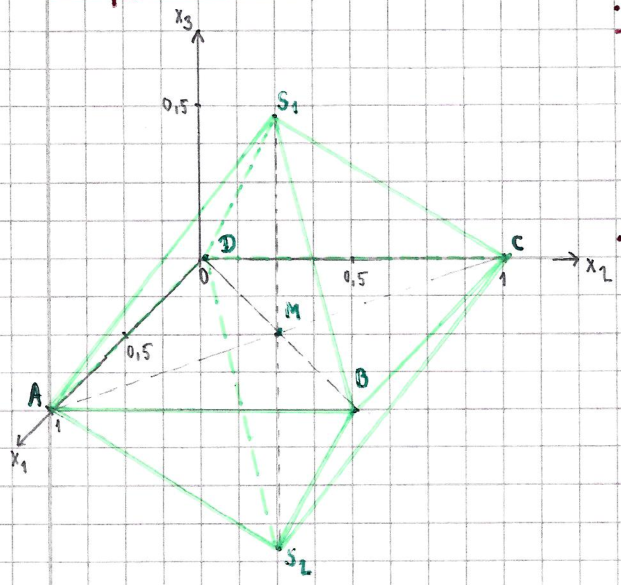
$$|\vec{n}| = \sqrt{100 + 25 + 361} = \sqrt{486} = 9\sqrt{6};\quad \vec{n_0} = \frac{1}{9\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$d(TU; RS) = \left| \begin{pmatrix} -1{,}5 + 2{,}5 \\ 6{,}5 - 5{,}5 \\ 2{,}5 + 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{9\sqrt{6}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix} \right|$$

$$\underline{\underline{d(TU; RS)}} = \frac{1}{9\sqrt{6}} \cdot |10 - 5 + 76| = \frac{81}{9\sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{6}}}$$

# LS Kursstufe Seite 118

## Aufgabe 6



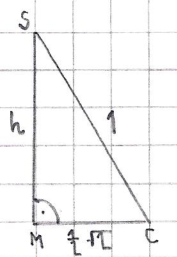

· **Koordinaten:**

$A(1|0|0)$; $B(1|1|0)$; $C(0|1|0)$; $D(0|0|0)$

$M\left(\frac{1+0}{2} \middle| \frac{0+1}{2} \middle| \frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow M(0{,}5|0{,}5|0)$

· **Bestimmung der Höhe:**

$d^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2}$




$h^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$

$h = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$S_1\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$S_2\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

· **Wähle zwei windschiefe Kanten des Oktaeders:**

$AD: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}$ ; $S_1C: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}; \; s \in \mathbb{R}$

d.h. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \sqrt{2} - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot \sqrt{2} \\ 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{0 + 2 + 1} = \sqrt{3}; \quad \vec{n_0} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$d(AD; S_1C) = \left| \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{6}}}$$

**Anmerkung:** Man kann den Oktaeder auch anders im Koordinatensystem platzieren, ohne dass dabei das Ergebnis verfälscht wird.

## Aufgabe 7:

a) Die beiden Geraden sind parallel zur $x_1x_2$-Ebene, da in den Richtungsvektoren die $x_3$-Komponente Null beträgt. Daher gibt die Differenz der Komponenten der Stützvektoren den Abstand der beiden Geraden an;

$\underline{\underline{d}} = 23 - 17 = \underline{\underline{6}}$

b) · parallel zur $x_1x_3$-Ebene; d.h. $\underline{\underline{d}} = 27 - 7 = \underline{\underline{20}}$

· parallel zur $x_1x_2$-Ebene; d.h. $\underline{\underline{d}} = 9 - 5 = \underline{\underline{4}}$

## Aufgabe 9

a) • Man wählt einen beliebigen Punkt G auf der Geraden g; z.B. deren Stützpunkt. Somit gilt: $G(1|2|5)$

• Für den Punkt H gilt folglich: $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+1 \\ 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

oder: $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

d.h. $H_1(3|3|6)$ bzw. $H_2(-1|1|4)$

• Der Richtungsvektor von h muss orthogonal zu $\overrightarrow{GH}$ und linear unabhängig von $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sein.

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{GH} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2v_1 + v_2 + v_3 = 0$

Bsp. Wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ beschreibt eine mögliche Gerade h.

b) • $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\vec{v}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

• Wähle $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$; mit $G(1|2|3)$

• $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+2 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad H(3|4|4)$

• Der Richtungsvektor $\vec{w}$ von h muss orthogonal zu $\vec{v}$ und linear unabhängig von $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ sein.

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2w_1 + 2w_2 + w_3 = 0$

Bsp.: Wähle $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ beschreibt eine mögliche Gerade h.

## Aufgabe 10

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{cc} 1 & -5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{array} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-5) \\ 1 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-5) - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ 4-0 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\vec{n}| = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9; \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$d(g;h) = \left| \begin{pmatrix} 7-0 \\ 7-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{9} \cdot \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{9} \cdot |49+24+8|$

$d(g;h) = \frac{81}{9} = 9$

# LS Kursstufe Seite 229

## Aufgabe 10

b)

- $\overrightarrow{G_sH_t} = \begin{pmatrix} 7+4t-0 \\ 7-5t-(1+s) \\ 2t-(2+s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+4t \\ 6-5t-s \\ -2+2t-s \end{pmatrix}$

- (1) $\overrightarrow{G_sH_t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6-5t-s-2+2t-s=0 \Leftrightarrow 4-3t-2s=0$
$\Leftrightarrow 3t+2s=4$

(2) $\overrightarrow{G_sH_t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 28+16t-30+25t+5s-4+4t-2s=0$
$\Leftrightarrow -6+45t+3s=0 \Leftrightarrow 15t+s=2$

$$\begin{array}{cc} t & s \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 15 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ -30 & -2 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ -27 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d.h. $\underline{\underline{G_2(0|3|4)}}$ und $\underline{\underline{H_0(7|7|0)}}$ sind die Lotfußpunkte auf g und h.

$|\overrightarrow{G_2H_0}| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = \underline{\underline{9 = d(g;h)}}$

## Aufgabe 11

a) $g \cap x_2 = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R} \Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left.\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow t=0 \\ \Rightarrow r=0 \\ \Rightarrow a \cdot 0 + 0 = 0 \neq -1 \end{array}\right\}$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist die Gerade g zur $x_2$-Achse windschief.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ a & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - a \cdot 1 \\ a \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\vec{n}| = \sqrt{a^2+1}; \quad \vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d(g;h) = \left| \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = d(a)$

- $d(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = 2 \Leftrightarrow a^2+1=4 \Leftrightarrow a^2=3 \Leftrightarrow |a| = \sqrt{3}$

Für $\underline{\underline{a=-\sqrt{3}}}$ und $\underline{\underline{a=\sqrt{3}}}$ beträgt der Abstand genau 0,5 LE.

- Der Abstand wird maximal, wenn bei $d(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ die Diskriminante des Nenners minimal wird.

$n(a) = a^2+1$ d.h. $n'(a) = 2a$ und $n''(a) = 2$

notwendige Bdg $n'(a)=0$: $2a=0 \Leftrightarrow a=0$

hinreichende Bdg $n''(a) \neq 0$: $n''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ Minimum

$\underline{\underline{d(0)}} = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = \underline{\underline{1}}$ ist für $\underline{\underline{a=0}}$ der maximale Abstand, den g von der $x_2$-Achse haben kann.