LS Kursstufe Seite 131

Aufgabe 1

a) $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}{5\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{5}{5\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\underline{\underline{\alpha \approx 71{,}6°}}$

b) $\cos(\beta) = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}} = \dfrac{17}{\sqrt{290}}$; $\underline{\underline{\beta \approx 3{,}4°}}$

c) $\cos(\gamma) = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{35}} = \dfrac{19}{35}$; $\underline{\underline{\gamma = 57{,}1°}}$

d) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-11\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -11+8+3 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$; d.h. $\underline{\underline{\delta = 90°}}$

Aufgabe 2

- $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{14}{27}}$; $\underline{\underline{\alpha \approx 43{,}94°}}$
- $\cos(\beta) = \dfrac{\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \dfrac{-14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = -\sqrt{\dfrac{14}{27}}$; $\underline{\underline{\beta \approx 136{,}06°}}$

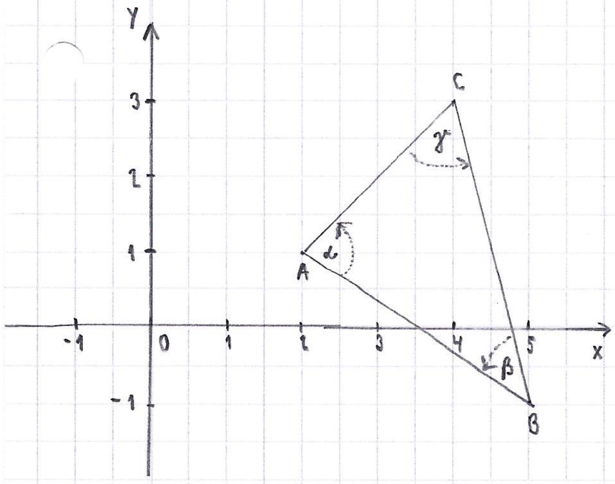
Supplementärwinkel, da gilt: $\alpha+\beta = 180°$

- $\cos(\gamma) = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \dfrac{-14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = -\sqrt{\dfrac{14}{27}}$; $\underline{\underline{\gamma \approx 136{,}06°}}$
- $\cos(\delta) = \dfrac{\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{14}{27}}$; $\underline{\underline{\delta \approx 43{,}94°}}$

Supplementärwinkel, da gilt: $\gamma+\delta = 180°$

Aufgabe 3

a) · Skizze



· Längen der Dreiecksseiten bestimmen

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$; $|\vec{AB}| = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$ [LE]

$\vec{AC} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; $|\vec{AC}| = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$ [LE]

$\vec{BC} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$; $|\vec{BC}| = \underline{\underline{\sqrt{17}}}$ [LE]

· Winkelberechnungen

$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 78{,}69°}}$

$\cos(\beta) = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{11}{\sqrt{221}}$

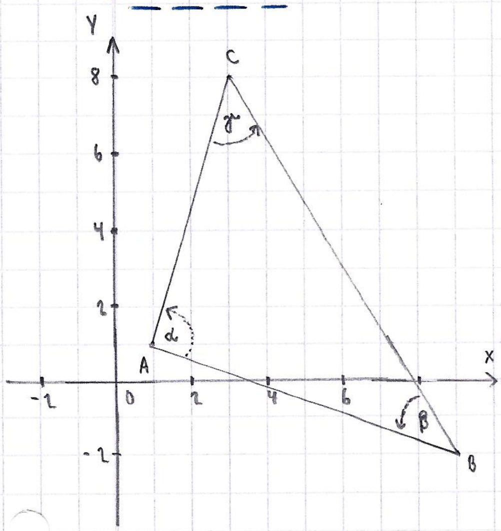
$\Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 42{,}27°}}$

$\underline{\gamma} = 180° - (\alpha+\beta) \approx \underline{\underline{59{,}04°}}$

LS Kursstufe Seite 131

Aufgabe 3

b) · **Skizze**



· **Längen der Dreiecksseiten bestimmen**

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$; $|\vec{AB}| = \underline{\underline{\sqrt{73}}}$ [LE]

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$; $|\vec{AC}| = \underline{\underline{\sqrt{53}}}$ [LE]

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$; $|\vec{BC}| = \sqrt{136} = \underline{\underline{2\sqrt{34}}}$ [LE]

· **Winkelberechnungen**

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}}{\sqrt{73} \cdot \sqrt{53}} = \frac{-5}{\sqrt{3869}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 94{,}61°}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}}{\sqrt{73} \cdot 2\sqrt{34}} = \frac{78}{2\sqrt{2482}} = \frac{39}{\sqrt{2482}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 38{,}48°}}$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = 180° - (\alpha + \beta) \approx \underline{\underline{46{,}91°}}$$

c) · **Längen der Dreiecksseiten bestimmen**

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $|\vec{AB}| = \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$ [LE]

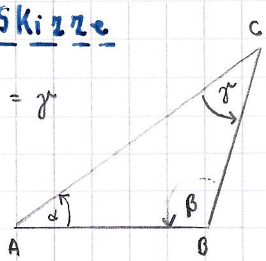
$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $|\vec{AC}| = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$ [LE]

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\vec{BC}| = \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$ [LE]

ΔABC ist ein <u>gleichschenkliges Dreieck</u>, da $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$. Somit sind die Basiswinkel α und γ gleich weit.

· **Skizze**

$\alpha = \gamma$



· **Winkelberechnungen**

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 78{,}46°}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = \gamma}} = \frac{180° - \beta}{2} \approx \underline{\underline{50{,}76°}}$$

d) · **Längen der Dreiecksseiten bestimmen**

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\vec{AB}| = \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$ [LE]

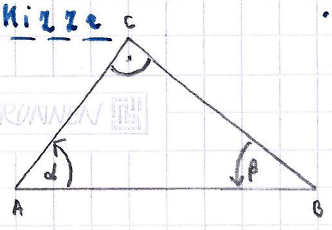
$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\vec{AC}| = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$ [LE]

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\vec{BC}| = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$ [LE]

$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 + 0 = 0$

$\Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{BC}$; d.h. ΔABC ist ein <u>rechtwinkliges Dreieck</u> mit $\underline{\underline{\gamma = 90°}}$.

· **Skizze**



· **Winkelberechnungen**

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{8}{4\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 50{,}76°}}; \quad \underline{\underline{\beta}} = 180° - (\alpha + \gamma) \approx \underline{\underline{39{,}23°}}$$

LS Kursstufe Seite 131 / 132

Aufgabe 4:

- Bestimmung der Spurpunkte $S_1(10|0|0)$; $S_2(0|6|0)$; $S_3(0|0|5)$
- Längen der Dreiecksseiten bestimmen

$\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{S_1S_2}| = \sqrt{100+36+0} = \sqrt{136} = \underline{\underline{2\sqrt{34}}}$ [LE]

$\overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{S_1S_3}| = \sqrt{100+0+25} = \sqrt{125} = \underline{\underline{5\sqrt{5}}}$ [LE]

$\overrightarrow{S_2S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{S_2S_3}| = \sqrt{0+36+25} = \underline{\underline{\sqrt{61}}}$ [LE]

- Winkelberechnungen

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{S_1S_2} \cdot \overrightarrow{S_1S_3}}{|\overrightarrow{S_1S_2}| \cdot |\overrightarrow{S_1S_3}|} = \frac{\begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}{2\sqrt{34} \cdot 5\sqrt{5}} = \frac{100}{10\sqrt{170}} = \frac{10}{\sqrt{170}}; \quad \underline{\underline{\alpha \approx 39{,}92°}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{S_2S_3}}{|\overrightarrow{S_2S_1}| \cdot |\overrightarrow{S_2S_3}|} = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}}{2\sqrt{34} \cdot \sqrt{61}} = \frac{36}{2\sqrt{2074}} = \frac{18}{\sqrt{2074}}; \quad \underline{\underline{\beta \approx 66{,}72°}}$$

$$\underline{\gamma} = 180° - (\alpha + \beta) \approx \underline{\underline{73{,}36°}}$$

Aufgabe 6:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}{3 \cdot 9} = \frac{16+2+4}{27} = \frac{22}{27}; \quad \underline{\underline{\alpha \approx 35{,}43°}}$$

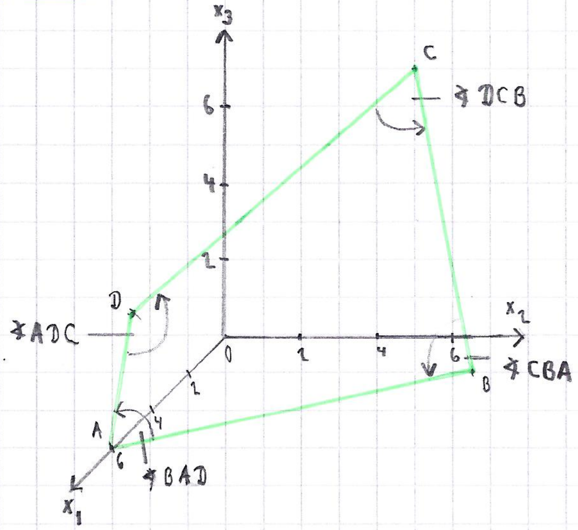
- Annika hat fälschlicherweise die Beträge im Nenner addiert statt multipliziert. Somit entsteht eine Zahl, die größer ist als 1.
- Ben hat das Skalarprodukt im Zähler falsch angewendet. Das Ergebnis beim Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Skalar; d.h. eine reelle Zahl und kein Vektor. Zudem wurde zusätzlich noch der Betrag des falsch erhaltenen Vektors gebildet.
- Carla hat den Kosinussatz zur Winkelberechnung zwischen Vektoren korrekt angewendet; allerdings hat sie im WTR das Bogenmaß statt Gradmaß eingestellt, sodass sie einen falschen Wert erhält.

BRUNNEN

LS Kursstufe Seite 232

Aufgabe 7:

a)



· Bestimmung der Viereckseiten

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\vec{AB}| = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $|\vec{BC}| = \sqrt{64{,}25}$

$\vec{CD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $|\vec{CD}| = \sqrt{74}$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\vec{AD}| = \sqrt{10}$

b) · Voraussetzung: Um ein Viereck bilden zu können, müssen die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene E liegen.

$E(ABC): \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{matrix} 7{,}5 & & 4 \\ 0 & \times & 6 \\ -4 & \times & -8 \\ 7{,}5 & \times & 4 \end{matrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \cdot 6 - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-8) - (-4) \cdot 6 \\ -4 \cdot 4 - 7{,}5 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 24 \\ 44 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 24 \\ 44 \end{pmatrix} = 0 \iff E: 45x_1 + 24x_2 + 44x_3 = -46$$

· Punktprobe mit $D(1|-2|1)$ in E: $45 - 48 + 44 = 41 \neq -46 \Rightarrow \underline{\underline{D \notin E}}$;

d.h. die Punkte ABCD bilden kein Viereck. Folglich dürften die Winkel ∢BAD, ∢CBA, ∢DCB, ∢ADC in Summe nicht 360° ergeben.

· Winkelberechnungen:

$$\cos(\sphericalangle BAD) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{8{,}5\sqrt{10}} = \frac{4}{8{,}5\sqrt{10}}; \quad \underline{\underline{\sphericalangle BAD \approx 81{,}44°}}$$

$$\cos(\sphericalangle CBA) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}}{8{,}5 \cdot \sqrt{64{,}25}} = \frac{10{,}25}{8{,}5\sqrt{64{,}25}}; \quad \underline{\underline{\sphericalangle CBA \approx 81{,}35°}}$$

$$\cos(\sphericalangle DCB) = \frac{\vec{CB} \cdot \vec{CD}}{|\vec{CB}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3{,}5 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{64{,}25} \cdot \sqrt{74}} = \frac{32}{\sqrt{4754{,}5}}; \quad \underline{\underline{\sphericalangle DCB \approx 62{,}35°}}$$

$$\cos(\sphericalangle ADC) = \frac{\vec{DC} \cdot \vec{DA}}{|\vec{DC}| \cdot |\vec{DA}|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-16}{\sqrt{740}}; \quad \underline{\underline{\sphericalangle ADC \approx 126{,}03°}}$$

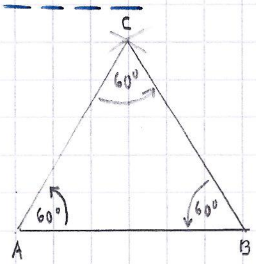
· Winkelsumme: $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA + \sphericalangle DCB + \sphericalangle ADC \approx \underline{\underline{351{,}17°}} \neq 360°$

$\Rightarrow$ Die Punkte ABCD bilden kein geschlossenes Viereck, da die vier Punkte nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen.

LS Kursstufe Seite 132

Aufgabe 8:

· Skizze:



In einem gleichseitigen Dreieck besitzen alle drei Innenwinkel die Weite $\frac{180°}{3} = 60°$.

Außerdem gilt: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 3$

$\cos(60°) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{3 \cdot 3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}} = \frac{9}{2} = \underline{\underline{4{,}5}}$

Aufgabe 9:

a) $\cos(45°) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ a \\ 0 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{2+a^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^2}{a^2+2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a^2 + 1 = a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a_1 = -\sqrt{2}\,;\ a_2 = \sqrt{2}$

Probe mit ...

· $a_1 = -\sqrt{2}$: $\frac{-\sqrt{2}}{2} \neq \cos(45°) \Rightarrow a_1$ entfällt

· $a_2 = \sqrt{2}$: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45°) \Rightarrow \underline{\underline{a_2 = \sqrt{2}}}$ ist die gesuchte Lösung

b) $\cos(30°) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ b \\ 0 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{3+b^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{\sqrt{b^2+3}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{b^2}{b^2+3}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}b^2 + \frac{9}{4} = b^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{1}{4}b^2 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b_1 = -3\,;\ b_2 = 3$

Probe mit ...

· $b_1 = -\sqrt{3}$: $\frac{-3}{\sqrt{12}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \neq \cos(30°) \Rightarrow b_1$ entfällt

· $b_2 = \sqrt{3}$: $\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos(30°) \Rightarrow \underline{\underline{b_2 = 3}}$ ist die gesuchte Lösung

c) $\cos(60°) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+c^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{c^2+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{c^2+1}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{c^2}{2 \cdot (c^2+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2} = c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow c^2 = 1 \Leftrightarrow c_1 = -1$, $c_2 = 1$

Probe mit ...

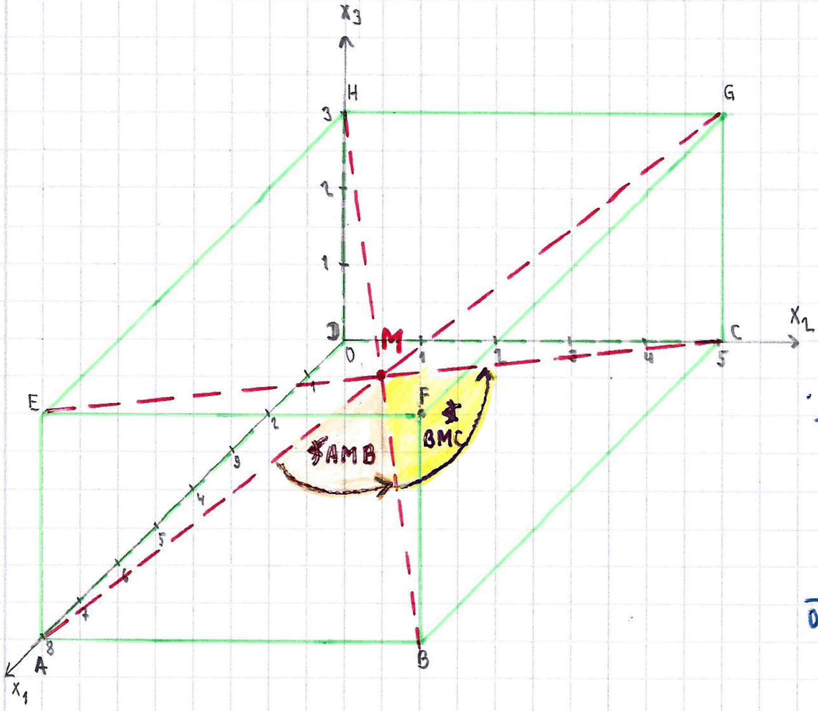
· $c_1 = -1$: $\frac{-1}{2} \neq \cos(60°) \Rightarrow c_1$ entfällt

· $c_2 = 1$: $\frac{1}{2} = \cos(60°) \Rightarrow \underline{\underline{c_2 = 1}}$ ist die gesuchte Lösung

LS Kursstufe Seite 131

Aufgabe 11

- Darstellung des Quaders



- Koordinaten:

A (8 | 0 | 0)
B (8 | 5 | 0)
C (0 | 5 | 0)
D (0 | 0 | 0)
E (8 | 0 | 3)
F (8 | 5 | 3)
G (0 | 5 | 3)
H (0 | 0 | 3)

- Ermittlung von M:

M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AG}$ bzw. $\overline{BH}$ bzw. $\overline{CE}$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+5 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

d.h. M (4 | 2,5 | 1,5)

- Relevante Vektoren und deren Beträge:

$\vec{MA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$; $|\vec{MA}| = \sqrt{16 + 6,25 + 2,25} = \sqrt{24,5}$

$\vec{MB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$; $|\vec{MB}| = \sqrt{16 + 6,25 + 2,25} = \sqrt{24,5}$

$\vec{MC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$; $|\vec{MC}| = \sqrt{16 + 6,25 + 2,25} = \sqrt{24,5}$

- Bestimmung der Winkel:

$$\cos(\sphericalangle AMB) = \frac{\vec{MA} \cdot \vec{MB}}{|\vec{MA}| \cdot |\vec{MB}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}}{\sqrt{24,5} \cdot \sqrt{24,5}} = \frac{12}{24,5} = \frac{24}{49}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sphericalangle AMB \approx 60,67°}}$$

$$\cos(\sphericalangle BMC) = \frac{\vec{MB} \cdot \vec{MC}}{|\vec{MB}| \cdot |\vec{MC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}}{\sqrt{24,5} \cdot \sqrt{24,5}} = \frac{-7,5}{24,5} = -\frac{15}{49}$$

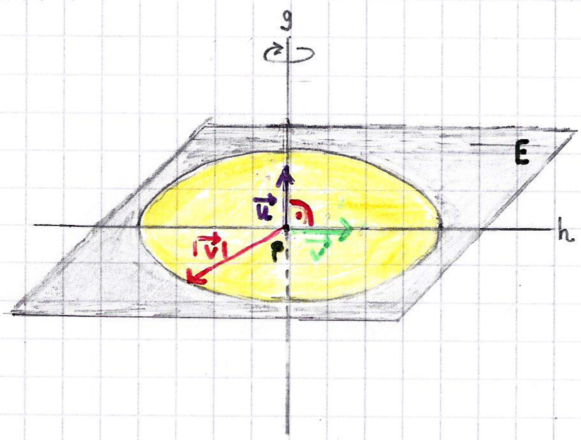
$$\Longrightarrow \underline{\underline{\sphericalangle BMC \approx 107,83°}}$$

Anmerkung: Je nach Lage des Quaders im Koordinatensystem vertauschen sich die Ergebnisse der Winkel (Bsp.: Falls man A statt D in den Ursprung legt).

LS Kursstufe Seite 232

Aufgabe 12

a) Skizze:



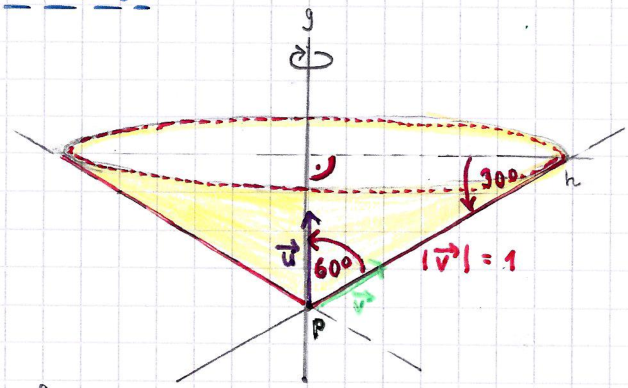
Beschreibung:

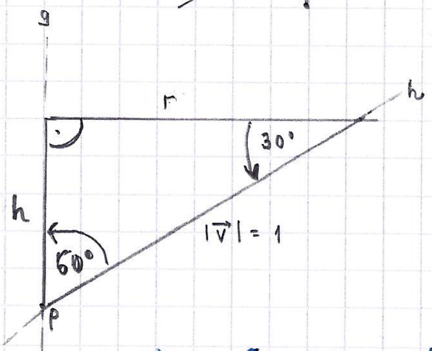
Da $g \perp h$, entsteht durch die Rotation der Geraden h um die Gerade g eine Ebene E, die als Stützvektor den Ortsvektor des Stützpunktes P beider Geraden besitzt; als Normalenvektor dient der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g:

$E: [\vec{x} - \vec{OP}] \cdot \vec{u} = 0$

Sämtliche Punkte auf h zwischen 0 und 1 liegen in E und bilden einen Kreis mit Radius $r = |\vec{v}|$.

b) Skizze:





$\sin(60°) = \frac{r}{1} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos(60°) = \frac{h}{1} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}$

Beschreibung:

$\cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 60°$

d.h. die Richtungsvektoren bilden einen Winkel von 60°.

Bei der Rotation von h um g bilden die Punkte auf h zwischen 0 und 1 den Mantel eines Kegels.

Der Kegel besitzt den Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und die Höhe $h = \frac{1}{2}$.