LS Kursstufe Seite 134

Aufgabe 1

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\vec{v}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{11}} = \frac{|1+0+9|}{\sqrt{110}} = \frac{10}{\sqrt{110}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 17,55°}}$$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$; $|\vec{v}| = \sqrt{25+4+100} = \sqrt{129}$

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{129}} = \frac{|5+2+10|}{\sqrt{387}} = \frac{17}{3\sqrt{43}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 30,21°}}$$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{9+81+1} = \sqrt{91}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\vec{v}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$$\cos(\gamma) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{14}} = \frac{|3+18-3|}{\sqrt{1274}} = \frac{18}{7\sqrt{26}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 59,72°}}$$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7,5 \end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{16+25+56,25} = \sqrt{97,25}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$; $|\vec{v}| = \sqrt{5,25}$

$$\cos(\delta) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{97,25} \cdot \sqrt{5,25}} = \frac{|-8+5+3,75|}{\sqrt{510,625}} = \frac{0,75}{\sqrt{510,625}} \Rightarrow \underline{\underline{\delta \approx 88,1°}}$$

Aufgabe 2

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{6}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = \sqrt{38}$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{38}} = \frac{|3+10-2|}{\sqrt{228}} = \frac{11}{2\sqrt{57}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 46,76°}}$$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $k \cdot \vec{n} = \vec{u} \Leftrightarrow k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = 1$

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g und der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E sind linear abhängig, somit schneidet g die Ebene E orthogonal; d.h.

$$\underline{\underline{\beta = 90°}}$$

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = \sqrt{70}$

$$\sin(\gamma) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{70}} = \frac{|6+6+5|}{\sqrt{2660}} = \frac{17}{2\sqrt{665}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 19,25°}}$$

d) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = \sqrt{29}$

$$\sin(\delta) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{29}} = \frac{|2+6+4|}{\sqrt{174}} = \frac{12}{\sqrt{174}} \Rightarrow \underline{\underline{\delta \approx 65,47°}}$$

LS Kursstufe Seite 135

Aufgabe 3

a) $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$; $|\vec{n}_{E_1}| = \sqrt{26}$; $\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{n}_{E_2}| = \sqrt{37}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{37}} = \frac{|30+0+0|}{\sqrt{962}} = \frac{30}{\sqrt{962}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 14{,}71°}}$$

b) $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $|\vec{n}_{E_1}| = \sqrt{3}$; $\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}$; $|\vec{n}_{E_2}| = \sqrt{51}$

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{51}} = \frac{|1-1+7|}{\sqrt{153}} = \frac{7}{3\sqrt{17}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 55{,}53°}}$$

c) $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{n}_1| = \sqrt{34}$; $\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$; $|\vec{n}_{E_2}| = \sqrt{22}$

$$\cos(\gamma) = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{22}} = \frac{|6-15+0|}{\sqrt{748}} = \frac{9}{2\sqrt{187}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 70{,}79°}}$$

d) $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ Parallelebene zur x_1x_3-Ebene

$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ Parallelebene zur x_2x_3-Ebene

$\vec{n}_{E_1}\cdot\vec{n}_{E_2} = 0 \Rightarrow \vec{n}_{E_1} \perp \vec{n}_{E_2}$

d.h. $\cos(\delta) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 90°}}$

Aufgabe 4

a) x_3-Achse: $\vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

d.h. $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = 1$; $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $|\vec{n}_E| = \sqrt{5}$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 26{,}57°}}$$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{5}$

- Die x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$) verläuft parallel zu g; somit schließt g keinen Winkel mit $x_3 = 0$ ein.
- x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$; d.h. $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = 1$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 26{,}57°}}$$

- x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$; d.h. $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = 1$

$$\sin(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 63{,}43°}}$$

LS Kursstufe Seite 135

Aufgabe 5

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{AB}| = 6$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-6 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{6 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45°}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}{6 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{24}{12\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 26{,}57°}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{4-8}{4\sqrt{10}} = \frac{-1}{10}\sqrt{10} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 108{,}43°}}$$

Anmerkung: Man könnte den dritten Winkel auch mithilfe des Innenwinkelsatzes in einem Dreieck bestimmen.

b) Die Grundfläche ABC liegt in der x_1x_2-Ebene; d.h. $x_3 = 0$ und somit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\vec{n}| = 1$.

- $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{21}$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 60{,}79°}}$$

- $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-6 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{33}$

$$\sin(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \sqrt{33}} = \frac{4}{\sqrt{33}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 44{,}13°}}$$

- $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-2 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{17}$

$$\sin(\gamma) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 75{,}96°}}$$

LS Kursstufe Seite 135

Aufgabe 7

Koordinaten: A(10|0|0) B(10|6,5|0) C(0|6,5|0) D(0|0|0)
E(10|0|3) F(10|6,5|3) G(0|6,5|3) H(0|0|3)
I(8|3,25|6) J(2|3,25|6)

a) Dachfläche EFI: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\6,5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\3,25\\3\end{pmatrix}$; $r,s \in \mathbb{R}$

$n_2 = 0$; $-2n_1 + 3n_3 = 0 \Leftrightarrow n_1 = \frac{3}{2}n_3$; $n_3 = 2t$; $n_1 = 3t$; $\vec{n} = t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$

EFI: $[\vec{x} - \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}]\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x_1 + 2x_3 = 36$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = \sqrt{13}$

Hauswand ABEF: $x_1 = 10$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = 1$

$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha \approx 33,69°$

eingeschlossener Winkel $\underline{\underline{\alpha^*}} = 180° - \alpha \approx \underline{\underline{146,31°}}$

Dachfläche FGI: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\6,5\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3,25\\3\end{pmatrix}$; $r,s \in \mathbb{R}$

$n_1 = 0$; $\frac{13}{4}n_2 = 3n_3 \Leftrightarrow n_2 = \frac{12}{13}n_3$; $n_3 = 13t$; $n_2 = 12t$; $\vec{n} = t\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\13\end{pmatrix}$

FGI: $[\vec{x} - \begin{pmatrix}10\\6,5\\3\end{pmatrix}]\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\13\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ FGI: $12x_2 + 13x_3 = 117$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\12\\13\end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = \sqrt{313}$

Hauswand BCFG: $x_2 = 6,5$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = 1$

$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\13\end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{313}} = \frac{12}{\sqrt{313}} \Rightarrow \beta \approx 47,29°$

eingeschlossener Winkel $\underline{\underline{\beta^*}} = 180° - \beta \approx \underline{\underline{132,71°}}$

Aufgrund der Symmetrie des Hauses beträgt der Winkel zwischen der Hauswand CDGH und der Dachfläche CDJ ebenfalls $\alpha^* \approx 146,31°$ und der Winkel zwischen der Hauswand ADEH und der Dachfläche ADI ebenfalls $\beta^* \approx 132,71°$.

b) $\cos(\delta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\13\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{313}} = \frac{26}{\sqrt{4069}} \Rightarrow \delta \approx 65,95°$

eingeschlossener Winkel: $\underline{\underline{\delta^*}} = 180° - \delta \approx \underline{\underline{114,05°}}$

Aus Symmetriegründen bilden die vier benachbarten Dachflächen jeweils den Winkel $\delta^* \approx 114,05°$.

Anmerkung: Man könnte das Haus auch anders ins Koordinatensystem einbringen; die Winkelweiten würden jedoch unverändert bleiben.

<u>LS Kursstufe Seite 135/136</u>

Aufgabe 8

Falls man davon ausgeht, dass der Würfel die Kantenlänge a besitzt, lauten entsprechend die Koordinaten der Pyramideneckpunkte wie folgt:

$A(a|0|0)$; $B(a|a|0)$; $C(0|a|0)$; $D(0|0|0)$; $S(\frac{a}{2}|\frac{a}{2}|a)$

a) · Grundfläche ABCD: x_1x_2-Ebene, d.h. $x_3 = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = 1$

· Seitenfläche ADS: $\vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}\\a\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

$\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_1\cdot a = 0 \Leftrightarrow n_1 = 0$ $\qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}\\a\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_2\cdot\frac{a}{2} + n_3\cdot a = 0 \Leftrightarrow n_2\cdot\frac{a}{2} = -n_3\cdot a \Leftrightarrow n_2 = -2n_3$

ADS: $2x_2 - x_3 = 0$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{5}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}43°}}$$

b) · Seitenfläche CDS: $\vec{x} = u\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}\\a\end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

$\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_2\cdot a = 0 \Leftrightarrow n_2 = 0$

$\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}\\a\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_1\cdot\frac{a}{2} + n_3\cdot a = 0 \Leftrightarrow n_1 = -2n_3$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

CDS: $2x_1 - x_3 = 0$

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \beta \approx 78{,}46°$$

eingeschlossener Winkel $\underline{\underline{\beta'}} = 180° - \beta \approx \underline{\underline{101{,}54°}}$

Aufgrund der Symmetrie bleiben die Winkelweiten unverändert unabhängig von der Wahl der Koordinaten bzw. der Kantenlänge des Würfels.

Aufgabe 9:

Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$	60°	90°	120°	
a) Gerade-Gerade	60°	90°	180° − 120° = 60°	
b) Ebene-Ebene	60°	90°	180° − 120° = 60°	
c) Gerade-Ebene	90° − 60° = 30°	90° − 90° = 0°	180° − 120° = 60° 90° − 60° = 30°	$\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$

LS Kursstufe Seite 136

Aufgabe 10

Eine mögliche Ebene besitzt den Origo als Stützpunkt und als Normalenvektor die erste Raumdiagonale $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ bzw. ein Vielfaches davon. Somit lautet eine mögliche Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 0$ mit $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $|\vec{n}_E| = \sqrt{3}$

Die x_1x_2-Ebene lautet $x_3 = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = 1$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 54{,}74°}}$$

Analog gilt für die x_1x_3-Ebene $x_2 = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = 1$

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 54{,}74°}}$$

bzw. für die x_2x_3-Ebene $x_1 = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = 1$

$$\cos(\gamma) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 54{,}74°}}$$

Aufgabe 11

$\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$; $|\vec{a}| = \sqrt{38}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}$; $|\vec{b}| = \sqrt{69}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{69}} = \frac{-12+4+35}{\sqrt{2622}} = \frac{27}{\sqrt{2622}} \Rightarrow \alpha \approx 58{,}18°$$

a) $g_1: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$; $g_2: \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

Gemeinsamer Schnittpunkt ist $O(0|0|0)$

b) $E_1: -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$; $E_2: 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0$

Beide Ebenen verlaufen durch $O(0|0|0)$

c) Man wählt einen der Vektoren als 1. Spannvektor der Ebene aus. Als 2. Spannvektor dient derjenige Vektor $\vec{n}$, der auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal steht.

$$\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 5 & 7 \\ -3 & 4 \\ 2 & 2 \end{array}$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}2\cdot 7 - 5\cdot 2\\ 5\cdot 4 - (-3)\cdot 7\\ -3\cdot 2 - 2\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14-10\\20+21\\-6-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\41\\-14\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} E: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\41\\-14\end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R} \\ g: \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{jeweils mit } O(0|0|0) \text{ als Stützpunkt}$$

LS Kursstufe Seite 136

Aufgabe 11

c) Man kann zur Kontrolle aus der Parameterform der Ebene zunächst eine Koordinatengleichung bilden:

$$\begin{array}{cc} 2 & 41 \\ 5 & -14 \\ -3 & 4 \\ 2 & 41 \end{array} \qquad \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-14) - 5\cdot 41 \\ 5\cdot 4 - (-3)\cdot(-14) \\ -3\cdot 41 - 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28-205 \\ 20-42 \\ -123-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -233 \\ -22 \\ -131 \end{pmatrix} = -1\cdot \begin{pmatrix} 233 \\ 22 \\ 131 \end{pmatrix}$$

d.h. $E: 233x_1 + 22x_2 + 131x_3 = 0$; mit $|\vec{n}| = \sqrt{71934}$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 233 \\ 22 \\ 131 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{71934}\cdot\sqrt{69}} = \frac{|932+44+917|}{\sqrt{4963446}} = \frac{1893}{\sqrt{4963446}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 58{,}18^\circ}}$$

Aufgabe 13

a)
- Gerade - Gerade: $\cos(\alpha) = |\vec{u_0}\cdot\vec{v_0}|$
- Ebene - Ebene: $\cos(\alpha) = |\vec{n_{E_0}}\cdot\vec{n_{F_0}}|$
- Gerade - Ebene: $\sin(\alpha) = |\vec{u_0}\cdot\vec{n_0}|$

b) Philipp hat Recht. Erhält man aus der Berechnung einen Winkel $\alpha > 90°$, so kann man diesen von $180°$ abziehen und erhält den gesuchten Winkel $\alpha^* = 180° - \alpha$. Folglich wäre α der Nebenwinkel des gesuchten Winkels α^*.

c) Albrecht täuscht sich, da die Vielfachheit des jeweiligen Vektors im Nenner durch den Betrag des vielfachen Vektors neutralisiert wird.

Bsp.: • $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{14}$; $\vec{u_0} = \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

• $\vec{v} = k\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix}$ ist ein k-Vielfaches von $\vec{u}$; $|\vec{v}| = \sqrt{14k^2}$

$$\Rightarrow \vec{v_0} = \frac{1}{\sqrt{14k^2}}\cdot\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}\cdot k}\cdot k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{u_0}$$

Somit erhält man stets einen eindeutigen Wert bei der Berechnung von Schnittwinkeln zwischen zwei Vektoren bzw. deren Vielfachen.

Aufgabe 14

a) x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = 1$

$\vec{u_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$ mit $|\vec{u_g}| = \sqrt{25+c^2}$

$$\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{25+c^2}} \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{25+c^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{c^2}{25+c^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25+c^2}{c^2} = 2 \Leftrightarrow 25+c^2 = 2c^2 \Leftrightarrow c^2 = 25 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = -5}} ; \underline{\underline{c_2 = 5}}$$

LS Kursstufe Seite 236

Aufgabe 14

b) Bei den zu betrachtenden Geraden handelt es sich um die zwei Winkelhalbierenden der $x_1 x_3$-Ebene mit den Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ sowie die zwei Winkelhalbierenden der $x_2 x_3$-Ebene mit den Richtungsvektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Die im Abstand 5 parallel zur $x_1 x_2$-Ebene verlaufende Ebene $x_3 = 5$ besitzt mit den betrachteten Winkelhalbierenden die Schnittpunkte $S_1(5|0|5)$, $S_2(-5|0|5)$, $S_3(0|5|5)$, $S_4(0|-5|5)$. Diese Schnittpunkte liegen auf der Kreislinie eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(0|0|5)$ und dem Radius $r = 5$ [LE].

Aufgabe 15

- Alle gesuchten Ebenen verlaufen durch die Punkte A und B; somit gilt:

$$F: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{v} \; ; \; r, s \in \mathbb{R}$$

$$F: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + s \cdot \vec{v} \; ; \; r, s \in \mathbb{R}$$

- Für den Normalenvektor $\vec{n_F}$ von F gilt:

$$\vec{n_F} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{n_F} \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4n_1 - 3n_3 = 0 \Leftrightarrow n_1 = \frac{3}{4} n_3$$

d.h. $n_1 = 3$; $n_3 = 4$; d.h. $\vec{n_F} = \begin{pmatrix}3\\n_2\\4\end{pmatrix}$

- E mit $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ und $|\vec{n_E}| = 5$ sowie F mit $\vec{n_F} = \begin{pmatrix}3\\n_2\\4\end{pmatrix}$ und $|\vec{n_F}| = \sqrt{25 + n_2^2}$ bilden den Winkel $\alpha = 60°$:

$$\cos(60°) = \frac{1}{2} = \frac{\left| \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\n_2\\4\end{pmatrix} \right|}{5 \cdot \sqrt{25 + n^2}} = \frac{|25|}{5\sqrt{25+n^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{25+n^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{25+n^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{25+n^2}{25} = 4 \Leftrightarrow 25 + n^2 = 100 \Leftrightarrow n^2 = 75$$

$$|n| = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \; ; \text{ d.h. } n_1 = -5\sqrt{3} \; ; \; n_2 = 5\sqrt{3}$$

Die zwei möglichen Ebenen lauten:

$F_1: [\vec{x}] \cdot \begin{pmatrix}3\\-5\sqrt{3}\\4\end{pmatrix} = 0$ bzw. $\underline{\underline{F_1: 3x_1 - 5\sqrt{3}\, x_2 + 4x_3 = 0}}$

$F_2: [\vec{x}] \cdot \begin{pmatrix}3\\5\sqrt{3}\\4\end{pmatrix} = 0$ bzw. $\underline{\underline{F_2: 3x_1 + 5\sqrt{3}\, x_2 + 4x_3 = 0}}$