LS Kursstufe Seite 247/248

Aufgabe 1

- Man wählt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$
- 1. Voraussetzung I „Das Viereck ist ein Parallelogramm; d.h. die Diagonalen halbieren sich."

  Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

  $\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

  Voraussetzung II „Die Diagonalen sind gleich lang."

  Das bedeutet in Vektorschreibweise: $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DB}|$ bzw.

  $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{DB}^2$

- 2. Behauptung: „Da das Viereck ein Parallelogramm ist, genügt nach dem Kongruenzsatz sws der Nachweis eines rechten Winkels"

  Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; d.h. bei A befindet sich ein rechter Winkel.

- 3. Beweis: $\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{\text{gemäß Voraussetzung I}}{=} \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)$

  $= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}^2 \overset{\text{gemäß Voraussetzung II}}{=} \frac{1}{4} \cdot \left[\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC}^2\right] = 0$

$\Rightarrow$ Ein Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen ist ein Rechteck.

Aufgabe 2

- Man wählt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$
- 1. Voraussetzung I „Das Viereck ist eine Raute"

  Das bedeutet in Vektorschreibweise: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

  $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$

  Voraussetzung II „Eine Raute ist ein Parallelogramm"

  Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{a} = \overrightarrow{DC}$

  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$

- 2. Behauptung: „Die Diagonalen sind zueinander orthogonal"

  Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

LS Kursstufe Seite 248

Aufgabe 2

- 3. Beweis:

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = (\vec{b} + \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}^2 - \vec{a}^2$

gemäß Voraussetzung I

$= \vec{b}^2 - \vec{b}^2 = 0$

⇒ Die Diagonalen in einer Raute sind orthogonal.

Aufgabe 3

- Man wählt $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{MC}$

- 1. Voraussetzung I: „Wenn der Punkt C auf dem Thales Kreis über der Strecke $\overline{AB}$ liegt, entspricht die halbe Strecke $\overline{AB}$ dem Radius dieses Kreises."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2$

Voraussetzung II: „Wenn der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist, so halbiert M diese Strecke."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \vec{a}$

- 2. Behauptung: „Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei C."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

- 3. Beweis: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CB} = -\vec{b} + \vec{a}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{b} + \vec{a}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

gemäß Voraussetzung I

$= \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - \vec{a}^2 = 0$

⇒ Beim Punkt C liegt ein rechter Winkel vor, was den Satz des Thales belegt.

<u>LS Kursstufe Seite 248</u>

Aufgabe 4

- Man wählt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

1. <u>Voraussetzung I:</u> „ M_1 ist die Mitte von $\overline{AD}$ "

   Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_1D} = \frac{1}{2}\vec{b}$

   <u>Voraussetzung II:</u> „ M_2 ist die Mitte von $\overline{BC}$ "

   Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{M_2C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

   <u>Voraussetzung III:</u> „ $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ sind parallel"

   Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{DC} = r \cdot \overrightarrow{AB} = r \cdot \vec{a}$; $r \in \mathbb{R}$

2. <u>Behauptung:</u> „ $\overline{M_1M_2}$ ist parallel zu $\overline{AB}$ "

   Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{M_1M_2} = s \cdot \overrightarrow{AB} = s \cdot \vec{a}$; $s \in \mathbb{R}$

3. <u>Beweis:</u>

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{DC})$$

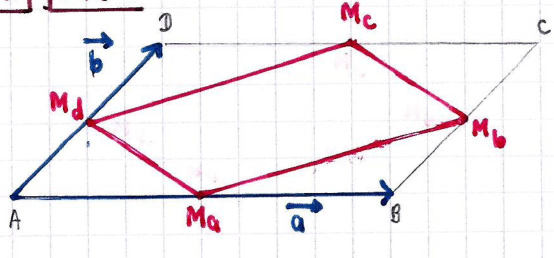
$$= -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\cdot(-\vec{a} + \vec{b} + r\cdot\vec{a})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}r\vec{a}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}r\vec{a} = \vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r\right) = s\cdot\vec{a}$$

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}$ und $\vec{a}$ sind Vielfache voneinander und somit <u>parallel!</u>

Aufgabe 6



<u>Anmerkung:</u> Fehler in der Grafik im Schülerbuch.

- Man wählt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

1. <u>Voraussetzung I:</u> „ M_a halbiert $\overline{AB}$ und M_c halbiert $\overline{DC}$ "

   Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AM_a} = \overrightarrow{M_aB} = \overrightarrow{DM_c} = \overrightarrow{M_cC} = \frac{1}{2}\vec{a}$

   <u>Voraussetzung II:</u> „ M_b halbiert $\overline{BC}$ und M_d halbiert $\overline{AD}$ "

   Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{BM_b} = \overrightarrow{M_bC} = \overrightarrow{AM_d} = \overrightarrow{M_dD} = \frac{1}{2}\vec{b}$

LS Kursstufe Seite 148

Aufgabe 6

1. Behauptung I: „Die Strecken $\overline{M_aM_b}$ und $\overline{M_dM_c}$ sind parallel und gleich lang."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{M_aM_b} = \overrightarrow{M_dM_c}$

3. Beweis I

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{M_aM_b} = \overrightarrow{M_aB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BM_b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{M_dM_c} = \overrightarrow{M_dD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DM_c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \end{array}\right\} \overrightarrow{M_aM_b} = \overrightarrow{M_dM_c}$$

Analog gilt:

1. Behauptung II: „Die Strecken $\overline{M_bM_c}$ und $\overline{M_dM_a}$ sind parallel und gleich lang."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{M_bM_c} = \overrightarrow{M_aM_d}$

3. Beweis II

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{M_bM_c} = \overrightarrow{M_bC} + \overrightarrow{CM_c} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{M_aM_d} = \overrightarrow{M_aA} + \overrightarrow{AM_d} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \end{array}\right\} \overrightarrow{M_bM_c} = \overrightarrow{M_aM_d}$$

$\Rightarrow$ Das Viereck $M_aM_bM_cM_d$ ist ein Parallelogramm.

Aufgabe 7

Man wählt $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

1. Voraussetzung I: „Der Punkt M halbiert die Strecke $\overline{AB}$"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\vec{a}$

Voraussetzung II: „Die Punkte P_1, P_2 und P_3 vierteln die Strecke $\overline{DC}$."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{DP_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_3C} = \frac{1}{4}\vec{a}$

1. Behauptung: „Die Strecken $\overline{AP_1}$ und $\overline{MP_3}$ sind parallel und gleich lang"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AP_1} = k \cdot \overrightarrow{MP_3}$; mit $k = 1$

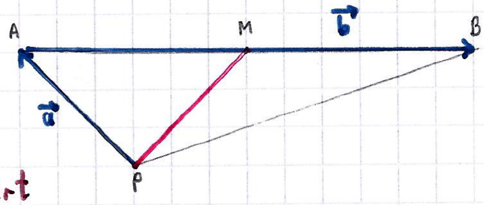
3. Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP_1} = \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} \\ \overrightarrow{MP_3} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP_3} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} = \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} \end{array}\right\} \overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{MP_3}$$

$\Rightarrow$ $\overline{AP_1}$ und $\overline{MP_3}$ sind parallel und gleich lang.

LS Kursstufe Seite 148

Aufgabe 8



Man wählt $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$

1. Voraussetzung „Der Punkt M halbiert die Strecke $\overline{AB}$."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\vec{b}$

2. Behauptung: „Die Summe der Strecken $\overrightarrow{PA}$ und $\overrightarrow{PB}$ entspricht der doppelten Abstand der Punkte P und M."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2 \cdot \overrightarrow{PM}$

3. Beweis:

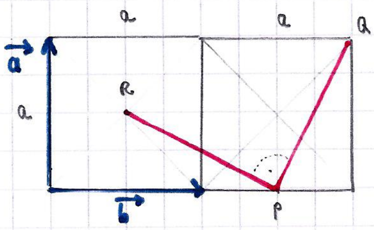
$$2 \cdot \overrightarrow{PM} = 2 \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM}) = 2 \cdot (\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2 \cdot \overrightarrow{PM}$

$\Rightarrow$ Die Summe von $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ entspricht $2 \cdot \overline{PM}$.

Aufgabe 9



Man wählt $\vec{a} = \vec{b} = a$

1. Voraussetzung I „Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich lang."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Voraussetzung II „Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal zueinander."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2. Behauptung: „Die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ sind orthogonal"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$

3. Beweis:

$$\overrightarrow{PQ} = \tfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PR} = -\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a}$$

$$(\tfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}) \cdot (\tfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})$$

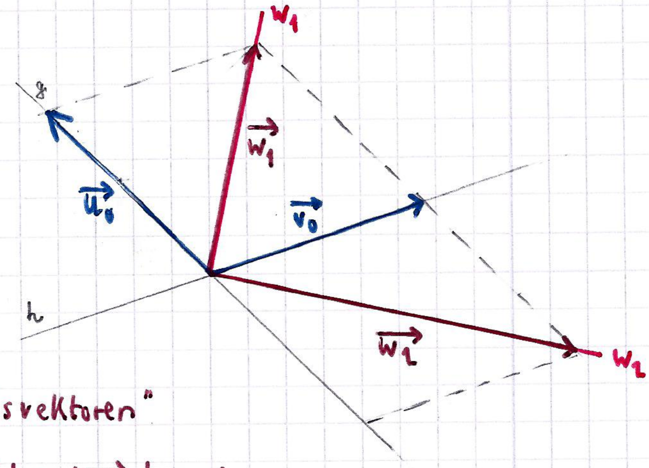
$$= \tfrac{1}{4}\vec{a}\,\vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{b}^2 + \tfrac{1}{2}\vec{a}^2 - \vec{a}\,\vec{b}$$

$$= 0 - \tfrac{1}{2}\vec{b}^2 + \tfrac{1}{2}\vec{a}^2 - 0$$

$$= -a + a = 0$$

$\Rightarrow$ Die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ sind orthogonal zueinander.

LS Kursstufe Seite 249



Aufgabe 12

- Man wählt $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ gemäß der nebenstehenden Grafik

1. Voraussetzung I „Die Vektoren $\vec{u_0}$ und $\vec{v_0}$ sind Einheitsvektoren"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $|\vec{u_0}| = |\vec{v_0}| = 1$

bzw. $\vec{u_0}^2 = \vec{v_0}^2 = 1$

Voraussetzung II „Die Vektoren $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ sind Linearkombinationen aus den Einheitsvektoren"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{w_1} = \vec{v_0} + \vec{u_0}$

$\vec{w_2} = \vec{v_0} - \vec{u_0}$

2. Behauptung: „w_1 und w_2 sind orthogonal zueinander"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{w_1} \cdot \vec{w_2} = 0$

3. Beweis:

$\vec{w_1} \cdot \vec{w_2} = (\vec{v_0} + \vec{u_0}) \cdot (\vec{v_0} - \vec{u_0}) = \vec{v_0}^2 - \vec{u_0}^2 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ Die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 sind orthogonal zueinander.

Aufgabe 13

- Man wählt $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{CD}$, $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

1. Voraussetzung: „M_1 halbiert $\overline{AB}$, M_2 halbiert $\overline{BC}$, M_3 halbiert $\overline{CD}$, M_4 halbiert $\overline{AD}$"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{AM_1} = \vec{M_1B} = \frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{BM_2} = \vec{M_2C} = \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{CM_3} = \vec{M_3D} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{AM_4} = \vec{M_4D} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

2. Behauptung I: „Die Strecken $\overline{M_1M_2}$ und $\overline{M_4M_3}$ sind parallel."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{M_1M_2} = \vec{M_4M_3}$

Behauptung II: „Die Strecken $\overline{M_2M_3}$ und $\overline{M_1M_4}$ sind parallel."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\vec{M_2M_3} = \vec{M_1M_4}$

LS Kursstufe S.149

Aufgabe 13

3. Beweis I

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{BM_2} = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}\\ \overrightarrow{M_4M_3} &= \overrightarrow{M_4D} + \overrightarrow{DM_3} = \tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \tfrac{1}{2}\vec{c} = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}\right\} \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{M_2M_3} &= \overrightarrow{M_2C} + \overrightarrow{CM_3} = \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{c}\\ \overrightarrow{M_1M_4} &= \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM_4} = -\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}\right\} \overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_4}$$

$\Longrightarrow$ $M_1 M_2 M_3 M_4$ bilden ein Parallelogramm.

Anmerkung:
- Der Beweis der Parallelität zweier gegenüberliegender Seiten genügt, um das Viereck als Parallelogramm zu identifizieren.
- Im Text werden die Mittelpunkte anders bezeichnet als in der Grafik: M_a statt M_1; M_b statt M_2; etc.

Aufgabe 14

1. Voraussetzung I „Alle Kanten des Tetraeders sind gleich lang"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = |\vec{e}|$

bzw. $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = \vec{d}^2 = \vec{e}^2$

Voraussetzung II „Alle Innenwinkel sind im gleichseitigen Dreieck gleichgroß"

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $-\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{b}\cdot\vec{c} = -\vec{a}\cdot\vec{d}$

1. Behauptung „Die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sind orthogonal zueinander."

Das bedeutet in Vektorschreibweise: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ bzw. $\vec{e}\cdot\vec{f} = 0$

3. Beweis:

$$\vec{e}\cdot\vec{f} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{b}\cdot\vec{c}$$

es gilt: $\vec{c} = -\vec{b} - \vec{a} - \vec{d}$

$$\begin{aligned}\vec{e}\cdot\vec{f} &= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot(-\vec{b}-\vec{a}-\vec{d}) + \vec{b}^2 + \vec{b}\cdot\vec{c}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}^2 - \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}^2 + \vec{b}\cdot\vec{c}\\ &= \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b}}_{0} \underbrace{- \vec{a}^2 + \vec{b}^2}_{\substack{0\\ \to \text{ vgl. Vorauss. I}}} \underbrace{- \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{c}}_{\substack{0\\ \to \text{ vgl. Vorauss. II}}} = 0\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sind orthogonal zueinander.