Nr. 10.) a) $f'(x) = x$ ist str. m. wachsend in $\mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist str. m. fallend für $x < 0$

b) $f(x) = -x^4$ ist rechtsgekrümmt für $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -4x^3$

$f''(x) = -12x^2 \leq 0$ für $x = 0$ gilt $f''(0) = 0$

c) $f(x) = x^4 \Rightarrow f(0) = 0^4 = 0$

$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$

$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$

Nr. 11) Es gilt $f(x) > 0 \wedge f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$ für $x > 0$

a) $$\left.\begin{aligned} g(x) &= 1 + f(x) > 0 \checkmark \\ g'(x) &= f'(x) > 0 \checkmark \\ g''(x) &= f''(x) > 0 \checkmark \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{alle Bedingungen erfüllt.}$$

b) $$\left.\begin{aligned} g(x) &= x \cdot f(x) > 0 \checkmark \\ g'(x) &= 1 \cdot \underbrace{f(x)}_{>0} + \underbrace{x \cdot f'(x)}_{>0} > 0 \checkmark \\ g''(x) &= \underbrace{f'(x)}_{>0} + 1 \cdot \underbrace{f'(x)}_{>0} + \underbrace{x \cdot f''(x)}_{>0} > 0 \checkmark \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{alle erfüllt}$$

c) $g(x) = f^2(x) > 0$

$g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) > 0$ alle erfüllt

$g''(x) = 2 \cdot [f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x)] = 2 \cdot \underbrace{(f'(x))^2}_{>0} + 2 \cdot \underbrace{f(x)}_{>0} \cdot \underbrace{f''(x)}_{>0} > 0$

d) $f(x) = x^2$ erfüllt alle Bedingungen

$g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$ ist für $x > 0$ eine Gerade mit der Steigung 1 und nicht linksgekrümmt.

O. Fell