LS - Kursstufe Seite 27

Nr. 1) Extremstellen: $f'(-2) = 0 \wedge f''(-2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(-2 \mid f(-2))$

$f'(2) = 0 \wedge f''(2) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(2 \mid f(2))$

Wendestellen: $f''(-1{,}4) = 0 \wedge f'''(-1{,}4) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W_1(-1{,}4 \mid f(-1{,}4))$

$f''(0) = 0 \wedge f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W_2(0 \mid f(0))$

$f''(1{,}4) = 0 \wedge f'''(1{,}4) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W_3(1{,}4 \mid f(1{,}4))$

Nr. 2) a) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 2x \stackrel{!}{=} 0$ notw. Bed. für Extrema

$x(3x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{3}$

hinr. Bed. für Extrema

$f''(x) = 6x - 2$; $f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \underline{H(0 \mid f(0))}$

$f''(\frac{2}{3}) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2 > 0 \Rightarrow \underline{T(\frac{2}{3} \mid f(\frac{2}{3}))}$

Wendestelle notw. Bed. $f''(x) = 0$

$6x - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

hinr. Bed. für Wendestelle $f'''(x_3) \neq 0$

$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(\frac{1}{3}) = 6 \neq 0 \Rightarrow \underline{W(\frac{1}{3} \mid f(\frac{1}{3}))}$

Nr. 2) b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4$

$f'(x) = x^3 \stackrel{!}{=} 0$ notw. Bed. für Extrema

$x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

hinr. Bed. für Extrema $f''(x_1) \gtrless 0$ oder VZV von $f'(x)$

$f''(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$? keine Aussage möglich

$\Rightarrow$ Untersuchung auf VZW von $f'(x)$ an der Stelle x_1

$f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $f'(x) > 0$ für $\Rightarrow T(0|0)$

Wendestellen $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$ notw. Bed.

$f''(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 = 0$

hinr. Bed. $f'''(x) = 6x \Rightarrow f'''(0) = 0$? keine Aussage

$\Rightarrow$ Untersuchung auf VZW von $f''(x)$ an der Stelle $x_2 = x_1$

$f''(x) > 0$ für $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für $0 < x \Rightarrow$

kein Wendepunkt im Punkt $T(0|0)$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 2$; $f'(x) = x^3 - 4x$; $f''(x) = 3x^2 - 4$

Extrema: notw. Bed. $f'(x) = 0 = x(x^2 - 4) \Rightarrow x_1 = 0 \lor$

$x_2 = -2 \lor x_3 = 2$

hinr. Bed. $f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ lokale Maximumstelle $x_1 = 0$

$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 > 0 \Rightarrow$ lokale Minimumstelle $x_2 = -2$

$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 > 0 \Rightarrow$ lokale Minimumstelle $x_3 = 2$

Wendestellen: notw. Bed. $f''(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{4,5} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

Wendestellen hinr. Bed. $f'''(x) = 6x \Rightarrow f'''(-\sqrt{\frac{4}{3}}) \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle $x_4 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$

$f'''(+\sqrt{\frac{4}{3}}) \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle $x_5 = +\sqrt{\frac{4}{3}}$

$x_4 = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

$x_5 = +\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Nr. 2) d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

$f'(x) = x^2 - 4x + 4$; $f''(x) = 2x - 4$; $f'''(x) = 2$

Extrema notw. Bed. $f'(x) = x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Rightarrow x_{1(2)} = +2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = \underline{\underline{+2}}$

hinr. Bed. $f''(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$? $\Rightarrow$ Untersuchung auf VZW

$f'(x) > 0$ für $x < 2 \wedge f'(x) > 0$ für $x > 2 \Rightarrow$ Sattelstelle 2

Wendestelle notw. Bed $f''(x) \stackrel{!}{=} 0 = 2x - 4 \Rightarrow x_2 = 2$

hinr. Bed $f'''(2) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle $x_2 = 2$

e) $f(x) = x(1 - x^2) = x - x^3$; $f'(x) = 1 - 3x^2$

$f''(x) = -6x$; $f'''(x) = -6$

Extrema notw. Bed $f'(x) = 0 = 1 - 3x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x_2 = +\frac{\sqrt{3}}{3}$

Extrema hinr. Bed. $f''(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -6 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0 \Rightarrow x_1$ Minimumstelle

$f''(+\frac{\sqrt{3}}{3}) = -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} < 0 \Rightarrow x_2$ = Maximumstelle

Wendestelle notw. Bed. $f''(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

hinr. Bed. $f'''(0) = -6 \neq 0$ Wendestelle $x_3 = 0$

f) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2$; $f'(x) = x^4 - 4x^2$; $f''(x) = 4x^3 - 8x$

$f'''(x) = 12x^2 - 8$

Extrema : $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_{2,3} = \pm 2$

kein VZW von $f'(x)$ an der Stelle $x_1 = 0 \Rightarrow$ Sattelstelle

$f''(-2) = 4(-2)^3 - 8 \cdot (-2) < 0 \Rightarrow x_2 = -2$ Maximumstelle

$f''(2) = 4 \cdot (2)^3 - 8 \cdot 2 > 0 \Rightarrow x_3 = 2$ Minimumstelle

Wendestellen : $f''(x) = 0 = x(4x^2 - 8) \Rightarrow x_4 = x_1 = 0 \vee x_{5;6} = \pm\sqrt{2}$

$f'''(0) \neq 0$; $f'''(-\sqrt{2}) \neq 0$; $f'''(\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow$ Wendestellen $-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}$

O. Fell