Nr. 13) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2$; $f'(x) = 4x^3 - 4x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 8x$; $f'''(x) = 24x - 8$

Extrema: notw. Bed $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

$4x^3 - 4x^2 = x^2(4x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 1$

hinr. Bed $f''(0) = 0\ ?$ $f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 > 0$

$\Rightarrow T(1 \mid 1^4 - \frac{4}{3} \cdot 1^2 - 2) = \underline{\underline{(1 \mid -\frac{7}{3})}}$

Wendestelle: $f''(x) = 0 \Rightarrow x(12x - 8) = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \vee x_4 = \frac{4}{3}$

$f'''(0) = 24 \cdot 0 - 8 \neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt $(0 \mid -2)$

$f'''(\frac{4}{3}) \neq 0 \Rightarrow$ Wendstelle mit $W(\frac{4}{3} \mid f(\frac{4}{3}))$

Da die Funktion nur den Tiefpunkt $(1 \mid -\frac{7}{3})$ hat und $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ strebt, hat f genau 2 Nullstellen.

Nr. 14) $S(x_0 \mid 0)$ ist Sattelpunkt von $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) = 0$

$f(x_0) = 0$; $f'''(x_0) \neq 0$

$g(x) = x \cdot f(x)$

$g'(x) = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$

$\Rightarrow g'(x_0) = 1 \cdot \underbrace{f(x_0)}_{=0} + x_0 \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=0} = 0$ ✓

$g''(x) = f'(x) + 1 \cdot f'(x) + x \cdot f''(x) = 2 \cdot f'(x) + x \cdot f''(x)$

$\Rightarrow g''(x_0) = 2 \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=0} + x_0 \cdot \underbrace{f''(x_0)}_{=0} = 0$ ✓

$g'''(x) = 2 \cdot f''(x) + 1 \cdot f''(x) + x \cdot f'''(x) = 3 \cdot f''(x) + x \cdot f'''(x)$

$g'''(x_0) = 3 \cdot \underbrace{f''(x_0)}_{=0} + x_0 \cdot \underbrace{f'''(x_0)}_{\neq 0} \neq 0$ ✓ für $x_0 \neq 0$

$\Rightarrow$ Alle Bedingungen für Sattelpunkt an der Stelle $x_0 \neq 0$ erfüllt.