Nr. 15) $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6x + 2b$

$f'''(x) = 6$

Wendestelle :⇒ $6x + 2b = 0$ notw. Bed

$x_w = \frac{-2b}{6} = -\frac{1}{3}b$

hinr. Bed. $f'''(-\frac{1}{3}b) = 6 \neq 0$

⇒ An der Stelle $x_w = -\frac{1}{3}b$ befindet sich eine Wendestelle. Damit an dieser Stelle auch eine waagrechte Tangente ist muss $f'(-\frac{1}{3}b) = 0$ sein.

$f'(-\frac{1}{3}b) = 3 \cdot (-\frac{1}{3}b)^2 + 2b \cdot (-\frac{1}{3}b) + c = 0$

$\frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}b^2 + c = 0$

$c = +\frac{1}{3}b^2$

Für $c = \frac{1}{3}b^2$ befindet sich an der Stelle $x_w = -\frac{1}{3}b$ eine Wendestelle mit waagrechter Tangente.

Extrema für $c = \frac{1}{3}b^2$ notw. Bed. $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + \frac{1}{3}b^2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{\cancel{(-2b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}b^2}}}{6} = \frac{-2b}{6} = -\frac{1}{3}b$

⇒ $-\frac{1}{3}b$ ist einzige Nullstelle von $f'(x)$.

An dieser Stelle befindet sich aber eine Wendestelle mit waagrechter Tangente und keine Extremstelle.

O. Fell