Nr. 9.) a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x + 1$

Kein Schnitt mit x-Achse

$\Rightarrow f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ kleinster Abstand zur x-Achse hat das Minimum

$f'(x) = x^3 - 1$; $f''(x) = 3x^2$

Minimum: notw. Bed. $f'(x) = 0 = x^3 - 1 \Rightarrow x_1 = 1$

hinr. Bed $f''(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{T(1 | \frac{1}{4})}}$

Der Punkt $T(1 | \frac{1}{4})$ hat den kleinsten Abstand.

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 12x^2 + \frac{3}{4}$

$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 24x = x(\frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 24)$

$f''(x) = 4x^2 + 3x + 24$ gesucht Minimum

$f'(x) = 0 = x(\frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 24) \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$

oder $\frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 24 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{+\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 24}}{\frac{4}{3} \cdot 2}$ < 0

$\Rightarrow$ keine Lösung

$f''(0) = 24 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{T(0 | \frac{3}{4})}}$ hat kleinsten Abstand

c) $f(x) = \cos(x) + 4$; $x \in [0 ; 2\pi]$

$f'(x) = -\sin(x)$; $f''(x) = -\cos(x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \lor x_2 = \pi \lor x_3 = 2\pi$

$f''(0) = -1 \cdot (\cos(0)) = -1 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f''(\pi) = -\cos(\pi) = -1 \cdot (-1) > 0 \Rightarrow T(\pi | -1+4) = (\pi | 3)$

$f''(2\pi) = -\cos(2\pi) = -1 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$T(\pi | 3)$ hat den kleinsten Abstand zur x-Achse.

O. Fell