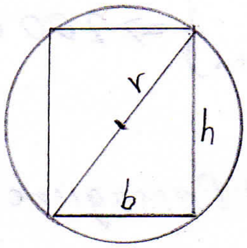
Nr. 17) a)



$T = c \cdot h^2 \cdot b$; c = Proportionalitätsfaktor, $c > 0$

Nebenbedingung: $h^2 + b^2 = (2r)^2$

$\Rightarrow h^2 = (2r)^2 - b^2$

$0 < b < 2r$

Zielfunktion: $\underline{\underline{T(b)}} = c \cdot \underbrace{(4r^2 - b^2)}_{= h^2} \cdot b = \underline{\underline{c \cdot 4r^2 \cdot b - c \cdot b^3}}$

Extrema notw. Bed. $T'(b) = c \cdot 4r^2 - 3cb^2 = 0$

$\Rightarrow 3cb^2 = c \cdot 4r^2 \mid :3c \Rightarrow b^2 = \frac{c \cdot 4r^2}{3 \cdot c} = r^2 \cdot \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \underline{\underline{b_E}} = \sqrt{r^2 \cdot \frac{4}{3}} = 2r\sqrt{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r}{3}}}$

notw. Bed. $T''(b) = -3c \cdot 2b \Rightarrow T''\left(\frac{2}{3}r\sqrt{3}\right) = \underbrace{-3}_{<0} \cdot \underbrace{c \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}r\sqrt{3}}_{>0} < 0$

$\Rightarrow$ Maximum der Tragfähigkeit für

$\underline{\underline{b_E = \frac{2}{3}r \cdot \sqrt{3}}}$ wenn $r = 50\,cm \Rightarrow \underline{\underline{b_E}} = \frac{2 \cdot 50 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx \underline{\underline{57{,}74\,cm}}$

$h_E^2 = 4r^2 - \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r}{3}\right)^2 = 4r^2 - \frac{4 \cdot 3 \cdot r^2}{9} = \frac{24}{9}r^2$

$\underline{\underline{h_E}} = \sqrt{\frac{24}{9} \cdot r^2} = \frac{r}{3}\sqrt{4 \cdot 6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}r\sqrt{6}}}$ für $r = 50\,cm \Rightarrow \underline{\underline{h_E = 81{,}65\,cm}}$

b) Mit Kathetensatz: $2r = 3a \Rightarrow a = \frac{2}{3}r$

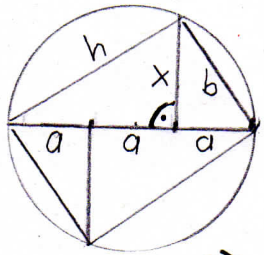
$b^2 = a \cdot 3a = 3a^2 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = \frac{3 \cdot 4}{9}r^2 \Rightarrow \underline{\underline{b}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{9}r^2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}r \cdot \sqrt{3}}}$

$h^2 = 2a \cdot 3a = 6a^2 = 6\left(\frac{2}{3}r\right)^2 = \frac{6 \cdot 4}{9}r^2 \Rightarrow \underline{\underline{h}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 4}{9}r^2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}r\sqrt{6}}}$

Zimmermannsregel liefert das gleiche Ergebnis

Nr. 17) b) ohne Kathetensatz

$$3a = 2r \Rightarrow a = \frac{2}{3}r$$



$$x^2+(2a)^2=h^2 \wedge x^2+a^2=b^2 \wedge h^2+b^2=(3a)^2$$

$$x^2=h^2-(2a)^2 \wedge x^2=b^2-a^2 \wedge b^2=(3a)^2-h^2$$

$$\Rightarrow h^2-(2a)^2=b^2-a^2$$

$$h^2=b^2-a^2+(2a)^2$$

$$h^2=(3a)^2-h^2-a^2+(2a)^2$$

$$h^2=9a^2-a^2+4a^2-h^2=12a^2-h^2 \quad |+h^2$$

$$2h^2=12a^2 \quad |:2$$

$$h^2=6a^2=6\cdot\left(\frac{2}{3}r\right)^2=\frac{6\cdot 4}{9}r^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\underline{\underline{h}}=\sqrt{\frac{4\cdot 6}{9}r^2}=\underline{\underline{\frac{2}{3}r\sqrt{6}}}$$

Analog die gleiche Rechnung mit b^2 durchführen.

$\Rightarrow$ Zimmermannsregel wird bestätigt

O. Fell