LS-Kursstufe S 51

Nr. 16) a) $h(x) = e^{a(b-x^2)}$ (100 m)

I $h(1) = e^{a(b-1^2)} = 2 \mid \ln \Rightarrow$ $a(b-1^2) = \ln(2)$

II $h(2) = e^{a(b-2^2)} = 1$ $a = \frac{\ln(2)}{b-1^2}$; $b \neq 1$

einsetzen in Gl. II

$h(2) = e^{\frac{\ln(2)}{b-1^2}\cdot(b-2^2)} = 1 \mid \ln$

$\underbrace{\frac{\ln(2)}{b-1}}_{\neq 0} \cdot (b-4) = \ln(1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = 4}}$

$a = \frac{\ln(2)}{4-1^2} = \frac{\ln(2)}{3} \Rightarrow \underline{h(x) = e^{\frac{\ln(2)}{3}\cdot(4-x^2)}}$

b) Von der Turmspitze muss der Wendepunkt zu sehen sein, dann sieht man den ganzen Hang. ⇒ Bestimmen des Wendepunktes ⇒ Wendetangente $t(x)$ ⇒ $t(0) - h(0) =$ Höhe Turm

$h'(x) = e^{\frac{\ln(2)}{3}\cdot(4-x^2)} \cdot \left(\frac{\ln(2)}{3}\cdot(-2)x\right)$

$h'(x) = \frac{-2\cdot\ln(2)\cdot x}{3} \cdot e^{\frac{\ln(2)}{3}\cdot(4-x^2)}$

$h''(x) = -\frac{2}{3}\ln(2)\cdot e^{\frac{\ln(2)}{3}\cdot(4-x^2)} + \frac{-2\ln(2)\cdot x}{3}\cdot e^{\frac{\ln(2)}{3}\cdot(4-x^2)} \cdot \frac{-2\ln(2)\cdot x}{3}$

$h''(x) = \underbrace{-\frac{2}{3}\ln(2)\cdot e^{\frac{\ln(2)}{3}\cdot(4-x^2)}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left[1 - \frac{2\cdot\ln(2)}{3}\cdot x^2\right]}_{\text{nach unten geöffnete Parabel}} \overset{!}{=} 0$ notw. Bed Wendepunkt

$\Rightarrow \left[1 - \frac{2\ln(2)}{3}x^2\right] = 0 \Rightarrow \left(1 - \sqrt{\frac{2\ln(2)}{3}}\cdot x\right)\cdot\left(1 + \sqrt{\frac{2\cdot\ln(2)}{3}}\cdot x\right) = 0$

3. Binomische Formel

$\Rightarrow \underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2\cdot\ln(2)}}}$

$h''(x)$ hat an den Stellen x_1 und x_2 einen VZW da 1. Term $\neq 0$ ist und 2. Term eine nach unten geöffnete Parabel darstellt

$\Rightarrow W_1(x_1 \mid h(x_1))$; $W_2(x_2 \mid h(x_2))$

$$W_1\left(+\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}}\;\middle|\; e^{\frac{\ln(2)}{3}\cdot\left(4-\frac{3}{2\ln(2)}\right)}\right)=\left(\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}}\;\middle|\; e^{\frac{4}{3}\ln(2)-\frac{1}{2}}\right)$$

$$W_1(\approx 1{,}471 \mid \approx 1{,}528)\;,\quad W_2(\approx -1{,}471 \mid \approx 1{,}528)$$

$$h'(x_1)=h'\left(+\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}}\right)=-\frac{2}{3}\ln(2)\cdot\sqrt{\frac{3}{2\ln(2)}}\cdot e^{\frac{\ln(2)}{3}\left(4-\frac{3}{2\ln(2)}\right)}$$

$$h'(x_1)=-\sqrt{\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{9}_{3}}(\ln(2))^{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}\cancel{\ln(2)}}}\cdot e^{\frac{4}{3}\ln(2)-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x_1)=-\sqrt{\frac{2}{3}\ln(2)}\cdot e^{\frac{4}{3}\ln(2)-\frac{1}{2}}\approx -1{,}039$$

Wendetangente im Punkt W_1

$$t(x)=-1{,}039\cdot(x-1{,}471)+1{,}528=-1{,}039\cdot x+3{,}056$$

$$h(0)=e^{\frac{4}{3}\ln(2)}\approx 2{,}520$$

Höhe des Turms $\quad t(0)-h(0)=3{,}056-2{,}520=0{,}536$

$\Rightarrow$ Der Turm muss mindestens 53,6 m hoch werden.

O. Fell