LS-Kursstufe Seite 55

Nr. 12) $f_k(x) = 1 - e^{-kx^2}$; $k > 0$

a) Die steilsten Stellen sind die Wendestellen x_w.
Steigung soll dort 10% betragen $\Rightarrow f_k'(x_w) = 0{,}1$

Bestimmung der Wendestellen : notw. Bed $f_k''(x) = 0$

$$f_k'(x) = -e^{-kx^2} \cdot (-2kx) = 2kx \cdot e^{-kx^2}$$

$$f_k''(x) = 2k \cdot e^{-kx^2} + 2kx \cdot e^{-kx^2} \cdot (-2kx)$$

$$f_k''(x) = \underbrace{2k \cdot e^{-k \cdot x^2}}_{>0 \text{ für } k>0} \cdot \underbrace{(1 - 2kx^2)}_{\text{Parabel nach unten geöffnet}} = 0 \quad \text{notw. Bed.}$$

$$1 - 2kx^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2k} \Rightarrow x_{w_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2k}}$$

hinr. Bed f_k'' hat einen VZW von − nach + an der Stelle $-\sqrt{\frac{1}{2k}}$

f_k'' hat einen VZW von + nach − an der Stelle $+\sqrt{\frac{1}{2k}}$

$\Rightarrow$ An den Stellen $\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}$ befinden sich Wendestellen

Berechnung von k für $f_k'(x_w) = 0{,}1$

$$f_k'\left(+\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = 2k \cdot \sqrt{\frac{1}{2k}} \cdot e^{-k \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2} = \sqrt{2k} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}1 \quad \Big| : e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2k} = \frac{1}{10 \cdot e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1 \cdot e^{\frac{1}{2}}}{10} \quad \Big| (\;)^2 \Rightarrow 2k = \frac{1}{100} \cdot e^1 \quad \Big| : 2$$

$$\Rightarrow k = \frac{e^1}{200} \approx 0{,}0136$$

Für $k \approx 0{,}0136$ beträgt die Steigung an den steilsten Stellen am linken Wendepunkt $-0{,}1$ und am rechten Wendepunkt $+0{,}1$.

b) Wenn man von links kommt muss man den linken Wendepunkt sehen, um den ganzen Kanal zu sehen.

$\Rightarrow$ Wendetangente im Punkt $W\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}} \,\middle|\, f_k\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)\right)$ schneiden mit der Geraden $y = 1{,}17$. (entspricht 11,7m)

$$f_k'\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = 2k \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{2k}} = -\sqrt{2k} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2k}{e}}$$

$$f_k\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = 1 - e^{-k \cdot \frac{1}{2k}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Tangentengleichung

$$t(x) = -\sqrt{\frac{2k}{e}}\left(x + \sqrt{\frac{1}{2k}}\right) + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = -\sqrt{\frac{2k}{e}} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{e}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$t(x) = -\sqrt{\frac{2k}{e}} \cdot x + 1 - \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Schnitt mit $y = 1{,}17 \Rightarrow t(x) = 1{,}17$

$$-\sqrt{\frac{2k}{e}} \cdot x + 1 - \frac{2}{\sqrt{e}} = 1{,}17 \quad \Big| -1 + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$-\sqrt{\frac{2k}{e}} \cdot x = 0{,}17 + \frac{2}{\sqrt{e}} \quad \Big| \cdot \left(-\sqrt{\frac{e}{2k}}\right)$$

$$x_s = -\sqrt{\frac{e}{2k}} \cdot \left(0{,}17 + \frac{2}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot \left(0{,}17 + \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$$

$$x_s \approx -\frac{1{,}612}{\sqrt{k}}$$

Vom Punkt $S_k\left(-\frac{1{,}612}{\sqrt{k}} \,\middle|\, 1{,}17\right)$ kann man den ganzen Kanal sehen.

O. Fell