LS-Kursstufe Seite 55

Nr. 15) $f_t(x) = 100\,t^2 x^2 e^{-tx}$; $t>0$

a) $f_t'(x) = 100\,t^2 \cdot 2x \cdot e^{-tx} + 100\,t^2 \cdot x^2 \cdot e^{-tx} \cdot (-t)$

$f_t'(x) = 100\,t^2 x \cdot e^{-tx} \cdot (2 - tx) \stackrel{!}{=} 0$ notw. Bed Extrema

$\Rightarrow x_1 = 0 \vee \underline{x_2 = \frac{2}{t}}$

hinr. Bed $f_t'(x) = \underbrace{100\,t^2 \cdot x \cdot e^{-tx}}_{>0 \text{ für } x>0} \cdot \underbrace{(2 - tx)}_{\substack{>0 \text{ für } x<\frac{2}{t} \\ <0 \text{ für } \frac{2}{t}<x}}$ $\Rightarrow$ VZW von + nach − von f_t'

$\Rightarrow \underline{\underline{H}} \left(\frac{2}{t} \middle| 100 \cdot t^2 \cdot \left(\frac{2}{t}\right)^2 \cdot e^{-t \cdot \frac{2}{t}}\right) = \left(\frac{2}{t} \middle| 400 \cdot e^{-2}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{2}{t} \middle| \frac{400}{e^2}\right)}}$

$\Rightarrow$ y-Koordinate des Hochpunktes ist unabhängig von t.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Maximale Höhe}}} = \frac{400}{e^2}\,\text{m} \approx \underline{\underline{54{,}13\,\text{m}}}$

---

b) $f_t'(x) = \underbrace{100 \cdot t^2 \cdot x \cdot e^{-tx}}_{>0 \text{ für } x>0} \cdot \underbrace{(2 - tx)}_{<0 \text{ für } \frac{2}{t}<x \text{ und } t>0}$

$\Rightarrow f_t'(x) < 0$ für $\frac{2}{t} < x \Rightarrow$ $\underline{\underline{f_t(x) \text{ ist streng monoton fallend für } \frac{2}{t} < x}}$

---

c) Steilste Stellen befinden sich an den Maximalstellen der Ableitung oder den Wendestellen $\Rightarrow$ Wendestelle notw. Bed $f_t''(x) \stackrel{!}{=} 0$

$f_t'(x) = 100\,t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (2x - tx^2)$

$f_t''(x) = 100\,t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (-t) \cdot (2x - tx^2) + 100\,t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (2 - 2tx)$

$f_t''(x) = 100\,t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (-2tx + t^2x^2 + 2 - 2tx)$

$f_t''(x) = \underbrace{100\,t^2 \cdot e^{-tx}}_{>0} \cdot \underbrace{(t^2x^2 - 4tx + 2)}_{\text{Parabel nach Oben offen}} = 0$ notw. Bed Wendestelle

$$x_{2,3} = \frac{+4t \pm \sqrt{(4t)^2 - 4 \cdot t^2 \cdot 2}}{2t^2} = \frac{4t \pm t\sqrt{4 \cdot 2}}{2t^2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{t}$$

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{t} \qquad \left(x_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{t} > \frac{2}{t} \text{ Fallender Teil der Bahn} \right)$$

An der Stelle $x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{t}$ findet ein VZW von $f_t''(x)$ statt $\Rightarrow$ Wendpunkt

Steigung am Wendepunkt $f_t'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{t}\right) \le 0{,}7$ gefordert.

$$f_t'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{t}\right) = 100\,t^{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{t}}\right) \cdot e^{-\cancel{t}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{t}}\right)} \cdot \left(2-\cancel{t}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{t}}\right)\right) \le 0{,}7$$

$$100t \cdot (2-\sqrt{2}) \cdot e^{-2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \le 0{,}7$$

$$\underline{\underline{t \le}} \frac{0{,}7}{\sqrt{2}\cdot 100 \cdot (2-\sqrt{2}) \cdot e^{-2+\sqrt{2}}} \approx \underline{\underline{0{,}015179}}$$

Die Steigung beträgt maximal 70%, wenn $t \le 0{,}015179$ ist.

O. Fell