LS Kursstufe Seite 55 / Aufgabe 16

a)
- Alle Graphen g_a besitzen genau eine Nullstelle bei $x_0 = 0$, die außerdem eine der Wendestellen aller Graphen g_a ist
- Alle Graphen g_a besitzen genau einen Tiefpunkt und einen Hochpunkt
- Alle Graphen g_a besitzen genau drei Wendestellen
- Alle Graphen g_a sind punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs $O(0|0)$
- Alle Graphen g_a besitzen die x-Achse als waagerechte Asymptote
- Alle Graphen g_a besitzen das gleiche Monotonie- und Krümmungsverhalten
- Für $a \to 0$ nähern sich die Graphen g_a der 1. Winkelhalbierenden

b)
- $g_a(-x) = -x \cdot e^{-a(-x)^2} = -x e^{-ax^2} = -g_a(x)$

Die Graphen der Schar sind punktsymmetrisch zum Ursprung $O(0|0)$.

c)
- Für $x \mapsto \pm\infty$ gilt $\dfrac{x}{\underbrace{e^{ax^2}}_{\to +\infty}} \to 0$

Die x-Achse $(y = 0)$ ist waagerechte Asymptote aller Graphen.

d)
- Ableitungen:

$g_a'(x) = 1 \cdot e^{-ax^2} + x \cdot (-2ax) \cdot e^{-ax^2} = e^{-ax^2}(1 - 2ax^2)$

$g_a''(x) = -2ax\, e^{-ax^2} \cdot (1 - 2ax^2) + e^{-ax^2} \cdot (-4ax) = -2ax \cdot e^{-ax^2} \cdot (3 - 2ax^2)$

- Extrema:

notwendige Bdg $g_a'(x) = 0 \Rightarrow e^{-ax^2} \cdot (1 - 2ax^2) = 0$

I $e^{-ax^2} \neq 0$; II $1 - 2ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2a} \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2a}\sqrt{2a}$

hinreichende Bdg $g_a''(x) \neq 0$

$g''\left(\frac{1}{2a}\sqrt{2a}\right) = -\sqrt{2a}\, e^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = -2\sqrt{\frac{2a}{e}} < 0 \to$ Maximum

$g''\left(-\frac{1}{2a}\sqrt{2a}\right) = 2\sqrt{\frac{2a}{e}} > 0 \longrightarrow$ Minimum

- Funktionswerte: $g_a\left(\pm\frac{1}{2a}\sqrt{2a}\right) = \pm\frac{1}{2a}\sqrt{2a}\, e^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2a}{e}}$

$H_a\left(\frac{1}{2a}\sqrt{2a} \,\middle|\, \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2a}{e}}\right)$

$T_a\left(-\frac{1}{2a}\sqrt{2a} \,\middle|\, -\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2a}{e}}\right)$

Aufgabe 16 d

· **Wendepunkte:**

· notwendige Bdg $g_a''(x) = 0 \Rightarrow -2ax(3-2ax^2)\cdot e^{-ax^2} = 0$

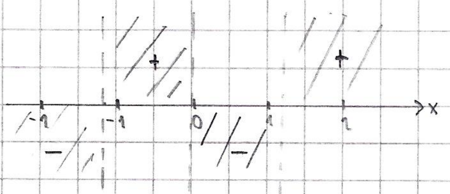
I $2ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

II $3-2ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2a} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{3}{2a}} = \frac{1}{2a}\sqrt{6a}$

III $e^{-ax^2} \neq 0$

· hinreichende Bdg mithilfe des Vorzeichenwechsels von g_1''

$g_1''(x) = -2x(3-2x^2)\cdot e^{-x^2}$ und $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{6}$



$g_1''(-2) = -10e^{-4} < 0$
$g_1''(-1) = 2e^{-4} > 0$
$g_1''(1) = -2e^{-4} < 0$
$g_1''(2) = 10e^{-4} > 0$

· Der Graph von g_a'' hat bei $x_1 = -\frac{1}{2a}\sqrt{6a}$ eine Nullstelle mit Vzw. von $- \rightarrow +$

$\Rightarrow$ Rechts-Links-Wendepunkt bei x_1

· Der Graph von g_a'' hat bei $x_2 = 0$ eine Nullstelle mit Vzw. von $+ \rightarrow -$

$\Rightarrow$ Links-Rechts-Wendepunkt bei x_2

· Der Graph von g_a'' hat bei $x_3 = \frac{1}{2a}\sqrt{6a}$ eine Nullstelle mit Vzw. von $- \rightarrow +$

$\Rightarrow$ Rechts-Links-Wendepunkt bei x_3

· **Funktionswerte**

$g_a\left(-\frac{1}{2a}\sqrt{6a}\right) = -\frac{1}{2a}\sqrt{6a}\, e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2ae}\sqrt{\frac{6a}{e}}$

$W_1\left(-\frac{1}{2a}\sqrt{6a} \,\middle|\, -\frac{1}{2ae}\sqrt{\frac{6a}{e}}\right)$; $W_2(0|0)$; $W_3\left(\frac{1}{2a}\sqrt{6a} \,\middle|\, \frac{1}{2ae}\sqrt{\frac{6a}{e}}\right)$

· **Extrem- und Wendepunkte der abgebildeten Graphen (Näherungen):**

Graph	Extrempunkte	Wendepunkte
g_1	T(−0,707 | 0,429) H(0,707 | 0,429)	W_1(−1,225 | −0,273) W_2(0 | 0) W_3(1,225 | 0,273)
g_2	T(−0,5 | −0,303) H(0,5 | 0,303)	W_1(−0,866 | −0,303) W_2(0 | 0) W_3(0,866 | 0,303)
g_4	T(−0,354 | −0,214) H(0,354 | 0,214)	W_1(−0,612 | −0,137) W_2(0 | 0) W_3(0,612 | 0,137)
g_8	T(−0,25 | −0,152) H(0,25 | 0,152)	W_1(−0,433 | −0,097) W_2(0 | 0) W_3(0,433 | 0,097)