Nr. 15) $h(t) = 4 \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \ln(t)$; $t > 1$

a) Extrema: notw. Bed $h'(t) = 0$

$$h'(t) = 4 \cdot (-2) \cdot t^{-3} \cdot \ln(t) + \frac{4}{t^2} \cdot \frac{1}{t}$$

$$h'(t) = \frac{-8 \cdot \ln(t)}{t^3} + \frac{4}{t^3} = \underbrace{\frac{1}{t^3}}_{>0} \cdot (-8 \cdot \ln(t) + 4) = 0$$

$$\Rightarrow -8 \cdot \ln(t) + 4 = 0 \Rightarrow \ln(t) = \frac{1}{2} \mid e^{\uparrow} \Rightarrow t_1 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

hinr. Bed. $f''(t) = -3 \cdot t^{-4} \cdot (-8\ln(t) + 4) + \frac{1}{t^3} \cdot \frac{-8}{t}$

$$f''(t) = \frac{-3 \cdot (-8 \cdot \ln(t) + 4)}{t^4} - \frac{8}{t^4}$$

$$f''(t) = \frac{24 \cdot \ln(t) - 12 - 8}{t^4} = \frac{24\ln(t) - 20}{t^4}$$

$$f''(\sqrt{e}) = \frac{24 \cdot \ln(e^{\frac{1}{2}}) - 20}{e^2} = \frac{12 - 20}{e^2} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$h(\sqrt{e}) = 4 \cdot \frac{1}{e} \cdot \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{4}{e} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{e} \Rightarrow \underline{H(\sqrt{e} \mid \tfrac{2}{e})}$$

$H(\approx 1{,}65 \mid \approx 0{,}74)$ Der höchste Wasserstand wird nach $\approx 1{,}65$ Tagen mit $\approx 0{,}74$ m erreicht.

---

b) Gesucht Wendestelle: notw. Bed $f''(t) = 0$

$$f''(t) = \frac{24\ln(t) - 20}{t^4} = \frac{4(6 \cdot \ln(t) - 5)}{t^4} = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \ln(t) - 5 = 0 \Rightarrow 6\ln(t) = 5 \mid :6 \Rightarrow \ln(t) = \frac{5}{6} \mid e^{\uparrow}$$

$$\underline{t = e^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{e^5} \approx 2{,}30}$$

hinr. Bed: $6 \cdot \ln(t) - 5$ ist streng monton wachsend

$\Rightarrow 6 \cdot \ln(t) - 5 < 0$ für $t < e^{\frac{5}{6}} \wedge 6 \cdot \ln(t) - 5 > 0$ für $t > e^{\frac{5}{6}}$

$\wedge\ t^4 > 0$ für $t > 0 \Rightarrow$ VZW von f'' an der Stelle $t = e^{\frac{5}{6}}$

$\Rightarrow W(\sqrt[6]{e^5} \mid h(\sqrt[6]{e^5}))$ Nach $\approx 2{,}3$ Tagen nimmt der Wasserstand am stärksten ab.

Nr. 15 c) Ges. Tangente an $h(t)$ an der Stelle 4.

$$h'(4) = \frac{1}{4^3} \cdot (-8 \cdot \ln(4) + 4) = \frac{1}{4^2} \cdot (-2 \cdot \ln(4) + 1) \approx -0{,}1108$$

$$h(4) = 4 \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \ln(4) = \frac{1}{4} \cdot \ln(4) \approx 0{,}3466$$

Tangente: $t(x) = h'(4) \cdot (x-4) + h(4)$

$$t(x) = \frac{1}{4^2} (-2 \cdot \ln(4) + 1) \cdot (x-4) + \frac{1}{4} \ln(4)$$

$$t(x) = \frac{1}{4^2} (-2 \ln(4) + 1) \cdot x - \frac{1}{4} (-2 \cdot \ln(4) + 1) + \frac{1}{4} \ln(4)$$

$$t(x) = \frac{1}{4^2} (-2 \ln(4) + 1) \cdot x + \frac{1}{4} (3 \ln(4) - 1) = 0$$ Schnitt mit x Achse

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_s}} = \frac{-\frac{1}{4}(3 \cdot \ln(4) - 1)}{\frac{1}{4^2}(-2 \ln(4) + 1)} = \frac{-4(3 \ln(4) - 1)}{-2 \ln(4) + 1} = \underline{\underline{\frac{4 - 12 \ln(4)}{1 - 2 \ln(4)}}}$$

$\underline{\underline{x_s \approx 7{,}1283}}$ Nach $\approx$ 7 Tagen ist die Wasserhöhe wieder normal.

d) Verschiebung von $h(t)$ um 3 LE nach rechts.

$$\Rightarrow h^*(t) = h(t-3) = 4 \cdot \frac{1}{(t-3)^2} \cdot \ln(t-3) \; ; \quad t \geq 4$$

O. Fell